

# Der Satz von Minkowski für Quader

Vom Fachbereich für Mathematik und Informatik  
der Technischen Universität Braunschweig

**genehmigte Dissertation**

zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

von Clemens Wolf  
aus Braunschweig

1. Referent: Prof. Dr. K. Burde
2. Referent: Prof. Dr. J. M. Wills

Eingereicht: 04. 03. 2004  
Prüfung: 17. 06. 2004

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Angewandte Mathematik, Abteilung Angewandte Algebra der Technischen Universität Braunschweig unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. K. Burde angefertigt.

Bei ihm möchte ich mich zu allererst ganz besonders bedanken, nicht nur für das Thema, das er gestellt hat, sondern vor allem für die Betreuung der Arbeit.

Des weiteren möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. J. M. Wills für die Übernahme des 2. Referats und bei Herrn Prof. Dr. A. Kemnitz für die mündliche Prüfung bedanken.

Ganz besonderer Dank gilt aber vor allem Katrin und Alina sowie meinen Eltern, die mich während meines gesamten Studiums und meiner Promotion in jeder erdenklichen Weise unterstützt haben und auch meinem Bruder Fabian samt Familie.

Ein weiteres Dankeschön auch an Prof. Dr. H. Opolka und Prof. Dr. K.-J. Wirths für die spontane und schnelle Hilfe bei der Suche eines Arbeitsplatzes und an Holger Kubiak für die technische Unterstützung.

Und nicht zuletzt vielen Dank an Jutta für's Korrekturlesen und ganz besonders Caro für ihr reges Interesse an meiner Arbeit und den ein oder anderen Motivationsschub.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Bezeichnungen</b>	<b>1</b>
<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>1 Grundlagen und Definitionen</b>	<b>4</b>
1.1 Allgemeine Grundlagen . . . . .	4
1.2 Weitere Definitionen . . . . .	7
<b>2 Absolut maximale <math>\mathcal{M}^2</math>-Quader</b>	<b>8</b>
2.1 Konstruktion . . . . .	8
2.2 Eigenschaften . . . . .	14
2.3 Maximale $\mathcal{M}^2$ -Quader . . . . .	24
<b>3 Absolut maximale <math>\mathcal{M}^3</math>-Quader</b>	<b>35</b>
3.1 Konstruktion . . . . .	35
3.2 Eigenschaften . . . . .	44
3.3 Ausblick: Absolut maximale $\mathcal{M}^n$ -Quader . . . . .	55
<b>4 Absolut maximale <math>\mathcal{M}_m^2</math>-Quader</b>	<b>58</b>
4.1 Konstruktion . . . . .	59
4.2 Eigenschaften . . . . .	66
4.3 Absolut maximale $\mathcal{M}_1^2$ -Quader . . . . .	72
4.4 Ausblick: Absolut maximale $\mathcal{M}_m^n$ -Quader . . . . .	74
<b>Zusammenfassung</b>	<b>77</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>79</b>



# Bezeichnungen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}$ ohne Null
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}^*$	$\mathbb{Z}$ ohne Null
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{>0}$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{P}$	Menge der Primzahlen
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler euklidischer Raum
$\Lambda^n$	n-dimensionales Punktgitter im $\mathbb{R}^n$
$B_{\Lambda^n}$	Basis von $\Lambda^n$
$F_B(\Lambda^n)$	Fundamentalzelle von $B_{\Lambda^n}$
$d(\Lambda^n)$	Gitterdeterminante von $\Lambda^n$
$\mathbb{Z}^n$	Gitter der ganz-rationalen Punkte im $\mathbb{R}^n$
$O$	Ursprung bzw. Nullpunkt eines Gitters im $\mathbb{R}^n$
$\overset{\circ}{K}$	offener Kern bzw. Inneres eines Körpers $K$
$\overline{K}$	Abschluss von $K$
$\partial K$	Rand von $K$
$\#GP(K)$	Anzahl der Gitterpunkte auf $K$
$\max(x, y)$	Maximum von $x$ und $y$
$\text{ggT}(x, y)$	größter gemeinsamer Teiler von $x$ und $y$
$x \mid y$	$x$ teilt $y$
$d(a, b)$	Abstand der Strecken bzw. Punkte $a$ und $b$
$ a $	Länge der Strecke $a$
$ \underline{a} $	Betrag des Vektors $\underline{a}$
$\underline{a} \cdot \underline{b}$	Skalarprodukt der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$
$\square$	Ende eines Teilbeweises
$\square\square\square$	Ende eines Beweises

# Einleitung

Grundlage der vorliegenden Arbeit ist der Satz von Minkowski für nullpunktsymmetrische konvexe Körper im  $\mathbb{R}^n$ . Bei diesem Satz handelt es sich um den zentralen Satz einer Theorie, die von ihrem Entdecker Hermann Minkowski (1864-1909) *Geometrie der Zahlen* genannt wurde.

In dieser Theorie werden geometrische Methoden auf zahlentheoretische Probleme, die z.B. bei der Arithmetik algebraischer Zahlkörper, bei der Theorie der Diophantischen Ungleichungen oder der Diophantischen Approximation auftreten, angewendet.

Eine der zentralen Fragestellungen der Geometrie der Zahlen ist die folgende:

Sei  $\Lambda^n$  ein Gitter im  $\mathbb{R}^n$  mit der Gitterdeterminante  $d(\Lambda^n)$  und  $K$  ein nullpunktsymmetrischer konvexer Körper. Wieviele Gitterpunkte enthält  $K$  bzw. unter welchen Bedingungen enthält  $K$  mindestens einen nichttrivialen Gitterpunkt?

Eine Aussage dazu macht der oben erwähnte

## Satz von Minkowski

*Ist  $K$  ein nullpunktsymmetrischer konvexer Körper und  $\Lambda^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  ein Gitter im  $\mathbb{R}^n$  mit*

$$V(K) > 2^n \cdot d(\Lambda^n) \quad \text{bzw.} \quad V(K) \geq 2^n \cdot d(\Lambda^n) \wedge K = \overline{K},$$

*so enthält  $K$  mindestens einen nichttrivialen Gitterpunkt.*

Aus dem Satz folgt also, daß ein nullpunktsymmetrischer konvexer Körper im  $\mathbb{R}^n$ , der keine nichttrivialen Gitterpunkte eines Gitters  $\Lambda^n$  in seinem Innern  $\overset{\circ}{K}$  enthält, höchstens das Volumen  $V_{\max}(K) = 2^n \cdot d(\Lambda^n)$  besitzt.

Bei den in der vorliegenden Arbeit betrachteten - abgeschlossenen - konvexen Körpern werden daher generell Gitterpunkte auf dem Rand  $\partial K$  der Körper zugelassen. Die Forderung der Gitterpunktfreiheit bezieht sich - abgesehen von Kapitel 4 - nur auf das Körperinnere  $\overset{\circ}{K}$ .



In Kapitel 2 und 3 werden zunächst 2- und 3-dimensionale nullpunktsymmetrische Quader untersucht, die keine nichttrivialen Gitterpunkte in ihrem Innern besitzen, sogenannte **2-** bzw. **3-dimensionale Minkowski-Quader** oder  $\mathcal{M}^2$ - bzw.  $\mathcal{M}^3$ -**Quader** (vgl. Kap. 1.2).

Dabei wird in besonderem Maße auf Konstruktion und Eigenschaften maximal großer Minkowski-Quader, d.h. Quader, die das durch den Satz von Minkowski vorgegebene maximale Volumen

$$V_{\max}(K) = 2^n \cdot d(\Lambda^n)$$

tatsächlich annehmen, eingegangen. Diese Quader werden **absolut maximale  $\mathcal{M}^n$ -Quader**<sup>1</sup> genannt. Sie bilden die Grundlage der vorliegenden Arbeit.

### Bemerkung

*Absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader bzw. maximale  $\mathcal{M}$ -Rechtecke im Gitter  $\mathbb{Z}^2$  waren das Hauptthema meiner Examensarbeit, die ich 1999 bei Herrn Prof. Dr. Burde geschrieben habe.*

*In Kapitel 2 werden unter anderem die für die vorliegende Arbeit relevanten Ergebnisse der Examensarbeit zusammengefasst, wobei größtenteils eine Erweiterung vom  $\mathbb{Z}^2$  auf allgemeine 2-dimensionale Gitter vorgenommen wird.*

Als eine Erweiterung der obigen Untersuchungen werden in Kapitel 4 schließlich nullpunktsymmetrische 2-dimensionale Quader betrachtet, in deren Innern eine gewisse Anzahl  $m$  nichttrivialer Gitterpunktpaare zugelassen wird, sogenannte  $\mathcal{M}_m^2$ -**Quader**.

Auch in diesem Fall liegt ein besonderes Augenmerk auf dem maximalen Volumen, das ein solcher  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader annehmen kann, und den Eigenschaften dieser Quader.

---

<sup>1</sup>In der Literatur wird in diesem Zusammenhang auch der Begriff des "extremalen Körpers" verwendet (vgl. [2], S. 75).

# Kapitel 1

## Grundlagen und Definitionen

### 1.1 Allgemeine Grundlagen

#### Definition 1.1

1. Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **konvex**, wenn sie mit zwei Punkten  $P_1, P_2 \in M$  auch deren Verbindungsstrecke enthält.
2. Eine Menge  $\emptyset \neq K' \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **Körper**, wenn sie keine niederdimensionalen Teile enthält, d.h. wenn jeder Randpunkt von  $K'$  auch Randpunkt des offenen Kerns  $\emptyset \neq K' \setminus \partial K' = \overset{\circ}{K'}$  ist (und umgekehrt):

$$\partial(K' \setminus \partial K') = \partial K'.$$

3. Eine Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **konvexer Körper**, wenn sie konvex und ein Körper ist.

#### Definition 1.2

Sei  $\{O; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$  ein fest vorgegebenes karthesisches Koordinatensystem des euklidischen Raums  $\mathbb{R}^n$ . Vektoren des  $\mathbb{R}^n$  werden bezüglich der **Ortho-normalbasis**  $E = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$  in der Form

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + \dots + a_n \underline{e}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

geschrieben, wobei die  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$  die **Komponenten** des Vektors sind.

**Bemerkung 1.3**

1. Nach Definition 1.2 wird jede weitere Basis  $B = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$  im  $\mathbb{R}^n$  durch

$$B = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\} = \{a_{11}\underline{e}_1 + \dots + a_{n1}\underline{e}_n, \dots, a_{1n}\underline{e}_1 + \dots + a_{nn}\underline{e}_n\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right\}$$

bezüglich der zugrundegelegten Orthonormalbasis  $E$  dargestellt.

2. Punkte (gleich Ortsvektoren) des  $\mathbb{R}^n$  werden bezüglich einer solchen Basis  $B = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$  in der Form

$$P = x_{p,1}\underline{a}_1 + \dots + x_{p,n}\underline{a}_n$$

oder kurz

$$P(x_{p,1}, \dots, x_{p,n})_B$$

geschrieben, wobei die  $x_{p,j} \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$  die **Koordinaten** des Punktes bezüglich der Basis  $B$  sind.

**Definition 1.4**

Die Punktmenge

$$\Lambda^n = \{P \mid P = x_{p,1}\underline{a}_1 + \dots + x_{p,n}\underline{a}_n; x_{p,j} \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n$$

nennt man ein von der Basis  $B_{\Lambda^n} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$  im  $\mathbb{R}^n$  aufgespanntes  $n$ -dimensionales (**Punkt-)Gitter**.

**Bemerkung 1.5**

Die Basis eines Gitters  $\Lambda^n$  ist nicht eindeutig festgelegt. So lassen sich aus geeigneten Linearkombinationen der Basisvektoren einer gegebenen Basis von  $\Lambda^n$  weitere Basen des selben Gitters konstruieren.

**Definition 1.6**

1. Das von den Basisvektoren  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  eines Gitters  $\Lambda^n$  im  $\mathbb{R}^n$  aufgespannte halboffene Parallelotop

$$F(\Lambda^n) = \{P \mid P = \vartheta_1\underline{a}_1 + \dots + \vartheta_n\underline{a}_n; 0 \leq \vartheta_j < 1, j = 1, \dots, n\}$$

nennt man eine **Fundamentalzelle** von  $\Lambda^n$ , genauer die zur Basis  $B_{\Lambda^n} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$  gehörende Fundamentalzelle  $F_B(\Lambda^n)$ .

2. Sei  $\Lambda^n$  ein Gitter im  $\mathbb{R}^n$  mit der Basis  $B_{\Lambda^n} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$  und

$$A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$$

diejenige Matrix, deren Spalten sich aus den Basisvektoren  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  ergeben. Dann bezeichnet man die positive Zahl

$$d(\Lambda^n) := |\det A|$$

als die **Determinante** des Gitters  $\Lambda^n$ .

### Bemerkung 1.7

1. Geometrisch läßt sich die Determinante eines Gitters  $\Lambda^n$  als das absolute Volumen einer Fundamentalzelle von  $\Lambda^n$  deuten.
2. Die Determinante eines Gitters  $\Lambda^n$  ist eine Gitterinvariante, d.h. sie ist unabhängig von der Wahl der Gitterbasis.

### Definition 1.8

Sei  $\Lambda^n$  ein Gitter im  $\mathbb{R}^n$  und sei  $1 \leq k \leq n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

1. Eine  $(n-k)$ -dimensionale Teilmenge von  $\Lambda^n$ , die selbst ein Gitter ist und den Ursprung  $O$  von  $\Lambda^n$  enthält, wird im folgenden als ein  $(n-k)$ -dimensionales **Untergitter**  $\tilde{\Lambda}^{n-k}$  von  $\Lambda^n$  bezeichnet.
2. Ein solches Untergitter  $\tilde{\Lambda}^{n-k}$  liegt in einem  $(n-k)$ -dimensionalen **Unterraum**  $U_0^{n-k}$ .
3. Die Gitter, die in zu  $U_0^{n-k}$  parallelen Unterräumen  $U_i^{n-k}$ ,  $i \in \mathbb{Z}^*$  liegen und von den gleichen Basisvektoren wie  $\tilde{\Lambda}^{n-k}$  aufgespannt werden, seien die **Nebengitter**  $\tilde{\Lambda}_i^{n-k}$  von  $\tilde{\Lambda}^{n-k}$ .
4. Entsteht ein  $(n-k)$ -dimensionales Untergitter durch den Schnitt eines  $(n-k)$ -dimensionalen Unterraums  $U_0^{n-k}$  des  $\mathbb{R}^n$  mit  $\Lambda^n$ , so wird im folgenden von einem **vollständigen**  $(n-k)$ -dimensionalen **Untergitter**  $\Lambda^{n-k}$  von  $\Lambda^n$  gesprochen.

### Bemerkung 1.9

1. Da die Nebengitter  $\tilde{\Lambda}_i^{n-k}$  eines Untergitters  $\tilde{\Lambda}^{n-k}$  von den gleichen Basisvektoren aufgespannt werden wie  $\tilde{\Lambda}^{n-k}$  selbst, ist die Anordnung der Gitterpunkte auf diesen Gittern identisch.
2. Ein Gitter setzt sich komplett aus einem vollständigen Untergitter und seinen - disjunkten - Nebengittern zusammen:  $\Lambda^n = \Lambda^{n-k} \cup \Lambda_i^{n-k}$ .

## 1.2 Weitere Definitionen

Da in dieser Arbeit als Spezialfälle konvexer Körper im  $\mathbb{R}^n$  vorwiegend 2- und 3-dimensionale Quader betrachtet werden, ist es sinnvoll, für diese Körperklassen einige weitere Bezeichnungen einzuführen:

### Definition 1.10

1. Nullpunktsymmetrische  $n$ -dimensionale Quader, die keine nichttrivialen Gitterpunkte eines Gitters  $\Lambda^n$  in ihrem Innern besitzen, heißen  **$n$ -dimensionale Minkowski-Quader**, kurz  **$\mathcal{M}^n$ -Quader**.
2. Der Schnitt eines  $\mathcal{M}^n$ -Quaders mit einer nullpunktsymmetrischen Hyperebene des  $\mathbb{R}^n$ , die zu einer der Quaderseiten parallel ist, wird eine **Achse** des Quaders genannt.
3.  $\mathcal{M}^n$ -Quader, die in einem Gitter  $\Lambda^n$  mit der Gitterdeterminante  $d(\Lambda^n)$  das - nach dem Satz von Minkowski maximale - Volumen

$$V_{\max} = 2^n \cdot d(\Lambda^n)$$

besitzen, heißen **absolut maximale  $\mathcal{M}^n$ -Quader**.<sup>1</sup>

4. Ein  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{\nu:1}^2$  mit dem festen Seitenverhältnis

$$\nu : 1, \nu \in \mathbb{R}_{>0},$$

der in einem Gitter  $\Lambda^2$  den für dieses Seitenverhältnis maximalen Flächeninhalt  $V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)$  annimmt, heißt **maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader** bezüglich des Seitenverhältnisses.

### Definition 1.11

1. Nullpunktsymmetrische  $n$ -dimensionale Quader, die  $m \in \mathbb{N}^*$  nichttriviale Gitterpunktpaare eines Gitters  $\Lambda^n$  in ihrem Innern besitzen, werden mit  **$\mathcal{M}_m^n$ -Quader** bezeichnet.
2. Analog zu Definition 1.10.2 werden Achsen von  $\mathcal{M}_m^n$ -Quadern definiert.

---

<sup>1</sup>Dabei handelt es sich um *extremale* Quader bezüglich  $\Lambda^n$  (vgl. [2], S. 75).

# Kapitel 2

## Absolut maximale $\mathcal{M}^2$ -Quader

In diesem Kapitel werden 2-dimensionale Minkowski-Quader bezüglich eines allgemeinen Gitters  $\Lambda^2$  untersucht.

Dabei werden zunächst absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader betrachtet und Eigenschaften dieser Quader herausgearbeitet. Schließlich werden in Kapitel 2.3 die maximalen Flächeninhalte von - ggf. nicht absolut maximalen -  $\mathcal{M}^2$ -Quadern in Abhängigkeit ihrer Seitenverhältnisse berechnet.

### 2.1 Konstruktion

Um einen absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  mit der Basis  $B_{\Lambda^2} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$  im  $\mathbb{R}^2$  zu erzeugen, geht man von einer nullpunktsymmetrischen Strecke  $t_0$  aus, die in einem Gitterpunkt

$$T(x_{t,1}, x_{t,2})_{B_{\Lambda^2}} \in \Lambda^2 \quad \text{mit} \quad \text{ggT}(x_{t,1}, x_{t,2}) = 1$$

beginnt und im Gitterpunkt  $-T(-x_{t,1}, -x_{t,2})_{B_{\Lambda^2}}$  endet (s. Fig. 2.2).

Die Gerade, auf der  $t_0$  liegt, wird mit  $g_0$  bezeichnet, der Vektor  $\overrightarrow{OT}$  mit  $\underline{t}$ .

#### Bemerkung 2.1

1. *Sämtliche Gitterpunkte des Gitters  $\Lambda^2$  liegen auf zu  $g_0$  parallelen Gitterpunktgeraden  $g_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ .*
2. *Die Geraden der Parallelschar  $g_i$  sind äquidistant. Dabei gilt für den Abstand von zwei benachbarten Gitterpunktgeraden  $g_i$  und  $g_{i+1}$ :*

$$|d(g_i, g_{i+1})| = \frac{d(\Lambda^2)}{|d(T, O)|},$$

mit  $d(T, O) = \frac{1}{2}|t_0| = |\underline{t}|$  als Abstand von  $T$  zum Ursprung von  $\Lambda^2$ .

**Beweis:** Beide Aussagen folgen aus der Tatsache, daß die Vektoren  $\overrightarrow{OT}$  und  $\overrightarrow{OP}$  mit einem beliebigen Gitterpunkt  $P$  auf  $g_1$  eine Gitterbasis von  $\Lambda^2$  bilden.  $\square\square\square$

Die Strecken  $t_1$  und  $t_{-1}$ , für die gilt:

- $t_{\pm 1}$  liegen auf den zu  $g_0$  benachbarten Gitterpunktgeraden  $g_{\pm 1}$ ,
- $t_1$  und  $t_{-1}$  haben die selbe Länge wie  $t_0$ :  $|t_{\pm 1}| = |t_0|$ ,
- die Mittelpunkte von  $t_{\pm 1}$  liegen auf einer zu  $g_0$  senkrechten Ursprungsgerade  $h_0$

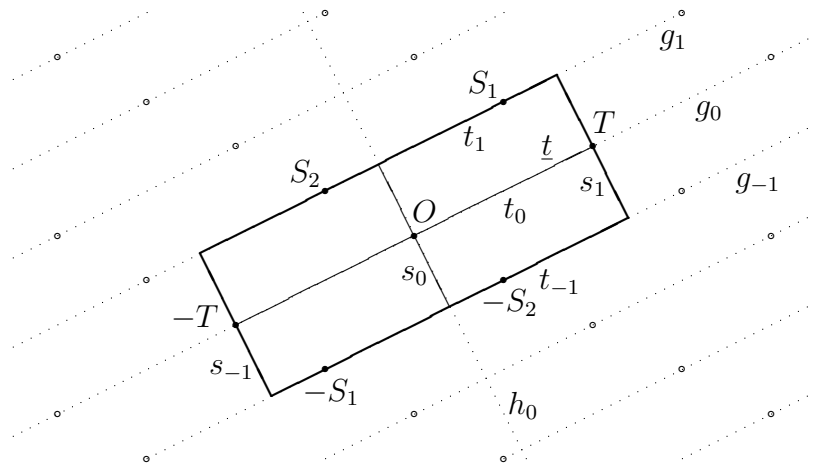
seien die zur Achse  $t_0$  parallelen Seiten des Quaders. Die Gitterpunkte auf  $t_1$  sind  $S_1, S_2, \dots$ , ihre Spiegelpunkte auf  $t_{-1}$  sind  $-S_1, -S_2, \dots$ .

Die andere Quaderachse  $s_0$  und die dazu parallelen Quaderseiten  $s_1$  und  $s_{-1}$  sind diejenigen Strecken, für die gilt:

- $s_0, s_1$  und  $s_{-1}$  sind senkrecht zu  $t_0$ ,
- der Mittelpunkt von  $s_0$  sei  $O(0,0)$ , der von  $s_1$  sei  $T$  und der von  $s_{-1}$  sei  $-T$ ,
- die Länge von  $s_0, s_1$  und  $s_{-1}$  ist gleich dem Abstand von  $t_1$  und  $t_{-1}$ :

$$|s_0| = |s_{\pm 1}| = |d(t_1, t_{-1})| \stackrel{2.1}{=} 2 \cdot \frac{d(\Lambda^2)}{|d(T, O)|}.$$

**Figur 2.2**



Ein derartig konstruierter  $\mathcal{M}^2$ -Quader lässt sich durch den Punkt  $T$ , den Mittelpunkt der Seite  $s_1$ , eindeutig charakterisieren:

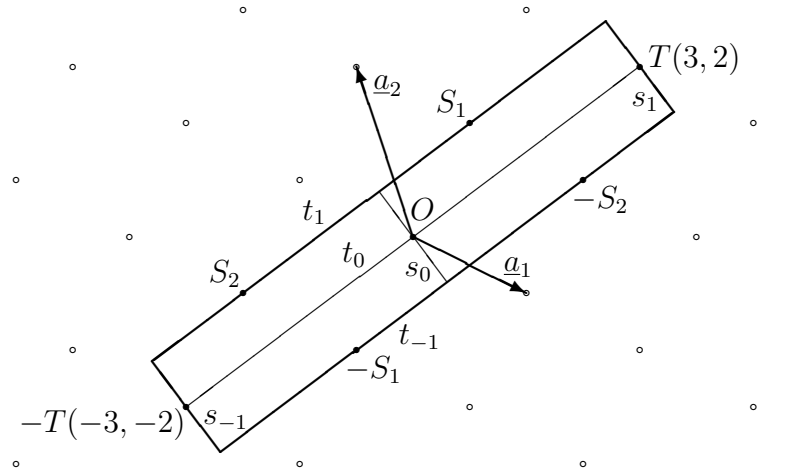
**Bezeichnung 2.3**

*Der oben konstruierte Quader - ein in  $\Lambda^2$  offenbar maximal ausgedehnter  $\mathcal{M}^2$ -Quader - mit dem Seitenmittelpunkt*

$$T(x_{t,1}, x_{t,2})_{B_{\Lambda^2}} \in \Lambda^2$$

*wird mit  $Q_T^2$  bzw.  $Q_{(x_{t,1}, x_{t,2})}^2$  bezeichnet.*

**Beispiel 2.4**  $Q_{(3,2)}^2$  im Gitter  $\Lambda^2$  mit der Basis  $B_{\Lambda^2} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$



**Bemerkung 2.5**

*Die Koordinaten eines Gitterpunkts des zugrundegelegten Gitters  $\Lambda^2$  auf dem Rand eines  $\mathcal{M}^2$ -Quaders sind teilerfremd.*

**Beweis:** Sei  $B_{\Lambda^2} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$  eine Basis von  $\Lambda^2$  und  $P(x_{p,1}, x_{p,2})_{B_{\Lambda^2}} \in \Lambda^2$  ein beliebiger Gitterpunkt auf dem Rand des  $\mathcal{M}^2$ -Quaders.

Ann.:  $\text{ggT}(x_{p,1}, x_{p,2}) > 1$ .

Dann liegt aber mit

$$P^* \left( \frac{x_{p,1}}{\text{ggT}(x_{p,1}, x_{p,2})}, \frac{x_{p,2}}{\text{ggT}(x_{p,1}, x_{p,2})} \right)_{B_{\Lambda^2}} \in \Lambda^2$$

ein nichttrivialer Gitterpunkt im Innern des Quaders, was im Widerspruch zur Konstruktion von  $\mathcal{M}^2$ -Quadern steht.  $\square\square\square$



Für die oben konstruierten  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_T^2$  soll nun der Flächeninhalt  $V(Q_T^2)$  berechnet werden:

Allgemein gilt für  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_T^2$  mit den Quaderachsen  $t_0$  und  $s_0$ :

$$(2.6) \quad V(Q_T^2) = |t_0| \cdot |s_0| = 2|d(T, O)| \cdot 2|d(t_{\pm 1}, t_0)|.$$

Mit Bemerkung 2.1 erhält man somit

$$(2.7) \quad V(Q_T^2) = 4|d(T, O)| \cdot \frac{d(\Lambda^2)}{|d(T, O)|} = 4 \cdot d(\Lambda^2).$$

Insgesamt gilt folgender Satz:

**Satz 2.8**

*Genau die in einem Gitter  $\Lambda^2$  maximal ausgedehnten  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_T^2$  mit den Seitenmittelpunkten  $\pm T \in \Lambda^2$  besitzen den Flächeninhalt*

$$V_{\max}(Q_T^2) = 2^2 \cdot d(\Lambda^2) = 4 \cdot d(\Lambda^2),$$

*sind also absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader in  $\Lambda^2$ .*

**Beweis:** Sei  $Q^2$  ein  $\mathcal{M}^2$ -Quader im Gitter  $\Lambda^2$  mit den sich gegenüberliegenden Quaderseiten  $r_{\pm 1}$ , der keine Gitterpunkte aus  $\Lambda^2$  als Seitenmittelpunkte besitzt (vgl. Fig. 2.9).

Dann ist zu zeigen:

$$V(Q^2) < 4 \cdot d(\Lambda^2).$$

Dabei können folgende Fälle unterschieden werden:

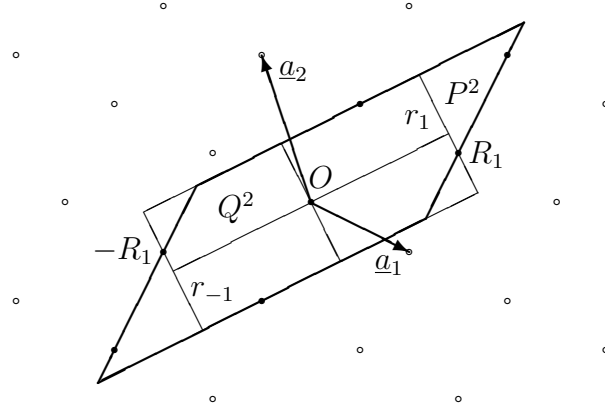
**1. Fall:** Auf  $\overset{\circ}{r}_{\pm 1}$  liegen keine Gitterpunkte aus  $\Lambda^2$ .

Dann läßt sich die zu  $r_1$  und  $r_{-1}$  senkrechte Achse von  $Q^2$  verlängern, ohne daß ein Gitterpunkt aus  $\Lambda^2$  im Innern dieses Quaders liegt. Es existiert also ein  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $\tilde{Q}^2$  in  $\Lambda^2$  mit

$$4 \cdot d(\Lambda^2) \geq V(\tilde{Q}^2) > V(Q^2).$$

**2. Fall:** Auf  $\overset{\circ}{r}_{\pm 1}$  liegt genau ein Gitterpunktpaar  $\pm R_1 \in \Lambda^2$ .

Da  $\pm R_1$  nach Voraussetzung keine Seitenmittelpunkte von  $r_{\pm 1}$  sind, läßt sich  $Q^2$  in  $\Lambda^2$  durch eine hinreichend kleine Drehung von  $r_{\pm 1}$  um die Punkte  $\pm R_1$ , wobei der kürzere Teil von  $r_{\pm 1}$  ins Innere von  $Q^2$  gedreht wird, vergrößern (s. Fig. 2.9).

**Figur 2.9**

Man kann somit ein nullpunktsymmetrisches Parallelogramm  $P^2$  konstruieren, das in seinem Innern keine Gitterpunkte aus  $\Lambda^2$  enthält.

Da ein Parallelogramm ein konvexer Körper ist, folgt mit dem Satz von Minkowski:

$$4 \cdot d(\Lambda^2) \geq V(P^2) > V(Q^2).$$

**3. Fall:** Auf  $\overset{\circ}{r}_{\pm 1}$  liegen mehrere Gitterpunktpaare  $\pm R_i \in \Lambda^2$ .

Seien  $R_1$  und  $R_2$  zwei benachbarte Gitterpunkte auf  $\overset{\circ}{r}_1$  mit dem Abstand  $d(R_1, R_2)$ .

Dann liegen sämtliche weitere Gitterpunkte  $P_i$  von  $\Lambda^2$  auf zu  $r_1$  parallelen Gitterpunktgeraden  $g_r$ , wobei für den Abstand zweier benachbarter Gitterpunkte  $P_1, P_2 \in g_r$  nach Bemerkung 2.1 bzw. nach Voraussetzung gilt:

$$|d(P_1, P_2)| = |d(R_1, R_2)| < |r_1|.$$

Da der Ursprung von  $\Lambda^2$  der einzig zulässige Gitterpunkt im Innern eines  $\mathcal{M}^2$ -Quaders ist, können wegen

$$|d(P_1, P_2)| < |r_1|$$

weitere Gitterpunkte auf dem Rand von  $Q^2$  - abgesehen von den Gitterpunkten  $\pm R_i \in r_{\pm 1}$  - nur auf der zu  $r_{\pm 1}$  parallelen Quaderachse  $r_0$  liegen. Dann wären sie aber Seitenmittelpunkte der zu  $r_{\pm 1}$  senkrechten Quaderseiten, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Andererseits ließe sich  $Q^2$  aber analog zum 1. Fall weiter vergrößern, kann also nicht absolut maximal in  $\Lambda^2$  sein.  $\square\square\square$

Die Achse  $t_0$  eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $Q_T^2$  kann auch als absolut maximaler  $\mathcal{M}^1$ -Quader in einem vollständigen 1-dimensionalen Untergitter  $\Lambda^1$  von  $\Lambda^2$  mit der Basis

$$B_{\Lambda^1} = \{t\} \quad \text{bzw.} \quad B'_{\Lambda^1} = \{-t\}$$

und der Gitterdeterminante

$$d(\Lambda^1) = |t| = |d(\pm T, O)|$$

interpretiert werden.

$\Lambda^1$  besteht dann aus den Gitterpunkten  $n \cdot T, n \in \mathbb{Z}$  auf der Gitterpunktgerade  $g_0$  (vgl. Fig. 2.2), d.h. es gibt genau einen absolut maximalen  $\mathcal{M}^1$ -Quader  $Q^1$  in  $\Lambda^1$ , nämlich die Strecke  $t_0$  mit der Länge

$$V_{\max}(Q^1) = 2 \cdot d(\Lambda^1) = |d(T, -T)| = |t_0|.$$

Damit läßt sich Satz 2.8 auch folgendermaßen formulieren:

### Korollar 2.10

*Ein maximal ausgedehnter  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$  besitzt genau dann den - nach dem Satz von Minkowski maximalen - Flächeninhalt*

$$V_{\max}(Q^2) = 2^2 \cdot d(\Lambda^2) = 4 \cdot d(\Lambda^2),$$

*wenn eine der Achsen des Quaders ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^1$ -Quader in einem vollständigen 1-dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^2$  ist.*

**Beweis:**  $\checkmark$

### Bemerkung 2.11

1. Diese Eigenschaft absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader ist auch charakteristisch für absolut maximale  $\mathcal{M}^3$ -Quader (vgl. Satz 3.2) und absolut maximale  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader (vgl. Kor. 4.17).  
Es ist darüberhinaus sogar zu vermuten, daß sie allgemein für alle absolut maximalen  $\mathcal{M}^n$ -Quader und absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^n$ -Quader gilt (vgl. Verm. 3.23 und 4.37).
2. Aus dem Satz von Minkowski-Hajós (vgl. [5], Kap. 13, S.31-33 und [6], Kap. 12) folgt u.a., daß extreme bzw. absolut maximale  $\mathcal{M}^n$ -Quader mindestens ein Seitenpaar besitzen, in dessen Innern genau ein Gitterpunktpaar liegt.  
Demnach würde es im 2. Teil des Beweises von Satz 2.8 auch genügen zu zeigen, daß diese Gitterpunkte gerade die Seitenmittelpunkte ihrer Seiten sein müssen.

## 2.2 Eigenschaften

### 2.2.1 Randpunkte

Nach Konstruktion (vgl. Kap. 2.1) besitzen absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_T^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$  die Gitterpunktpaare  $\pm T$  und  $\pm S_i$  auf ihren Seiten  $s_{\pm 1}$  und  $t_{\pm 1}$ . Diese Randpunkte sind ein charakteristisches Merkmal absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader.

In diesem Abschnitt wird daher auf die Anzahl und Lage der Gitterpunkte auf dem Rand solcher  $\mathcal{M}^2$ -Quader näher eingegangen.

#### Anzahl der Randpunkte absolut maximaler $\mathcal{M}^2$ -Quader

##### Satz 2.12

*Absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  besitzen genau 3 oder 4 Gitterpunktpaare aus  $\Lambda^2$  auf ihrem Rand.*

**Beweis:** Nach Konstruktion besitzt ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_T^2$  im Gitter  $\Lambda^2$  genau drei Gitterpunkte auf der Strecke  $t_0$ , nämlich  $T$ ,  $-T$  und den Ursprung  $O$ .

Für zwei benachbarte Gitterpunkte  $\pm S_1, \pm S_2 \in t_{\pm 1}$  gilt:

$$|d(\pm S_1, \pm S_2)| = |d(T, O)| = |d(-T, O)|.$$

Wegen

$$|t_1| = |t_{-1}| = |t_0|$$

liegen daher mindestens zwei, höchstens aber drei Gitterpunkte auf den Quaderseiten  $t_1$  bzw.  $t_{-1}$ , wobei im 2. Fall je zwei davon Endpunkte von  $t_{\pm 1}$  sein müssen.

Da auf den zu  $t_{\pm 1}$  senkrechten Seiten  $s_1$  und  $s_{-1}$  nach Konstruktion außer  $\pm T$  und etwaigen Eckpunkten keine weiteren Gitterpunkte aus  $\Lambda^2$  liegen, besitzt  $Q_T^2$  genau 3 oder 4 Gitterpunktpaare auf seinem Rand.  $\square\square\square$

##### Korollar 2.13

*Liegen 4 Gitterpunktpaare eines Gitters  $\Lambda^2$  auf dem Rand eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders, so gilt:*

1. *Bei den Gitterpunkten handelt es sich um die 4 Eckpunkte und die 4 Seitenmittelpunkte des Quaders.*
2.  *$\Lambda^2$  läßt sich durch eine Orthogonalbasis aufspannen.*

**Beweis:**

1. Nach dem Beweis von Satz 2.12 liegen genau dann 3 Gitterpunkte eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $Q_T^2$  auf den Quaderseiten  $t_1$  bzw.  $t_{-1}$ , wenn je zwei davon Endpunkte von  $t_{\pm 1}$  sind.

Dann ist der dritte Gitterpunkt aber jeweils Seitenmittelpunkt von  $t_{\pm 1}$  und  $Q_T^2$  besitzt mit den zusätzlichen Seitenmittelpunkten  $\pm T$  insgesamt 4 Eckpunkte und 4 Seitenmittelpunkte.  $\square$

2. Seien  $\pm S \in \Lambda^2$  die Seitenmittelpunkte von  $Q_T^2$  auf den Quaderseiten  $t_1$  und  $t_{-1}$ . Dann läßt sich  $\Lambda^2$  z.B. durch die orthogonalen Vektoren

$$\overrightarrow{OT} =: \underline{a}_1 \quad \text{und} \quad \overrightarrow{OS} =: \underline{a}_2$$

erzeugen.  $\square\square\square$

**Satz 2.14**

1. In Satz 2.12 gilt sogar: Genau die  $\mathcal{M}^2$ -Quader mit 3 oder 4 Gitterpunktpaaren auf ihrem Rand sind absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader in  $\Lambda^2$ .
2. Ein  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  besitzt höchstens 4 Gitterpunktpaare aus  $\Lambda^2$  auf seinem Rand.

**Beweis:**

1. Besitzt ein  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q^2$  im Gitter  $\Lambda^2$  6 oder 8 Randpunkte aus  $\Lambda^2$ , so liegen mindestens 2 davon auf einer Quaderseite  $r_1$ .

Weitere Gitterpunkte auf  $Q^2$  können dann aber nur auf der  $r_1$  gegenüberliegenden Quaderseite  $r_{-1}$  und auf der zu  $r_1$  und  $r_{-1}$  parallelen Quaderachse  $r_0$  liegen (vgl. Bew. von Satz 2.8, 3. Fall), und für den Abstand von zwei benachbarten Gitterpunkten  $R_1$  und  $R_2$  auf  $r_1$  gilt:

$$|d(R_1, R_2)| \geq \frac{1}{2}|r_0|.$$

**1. Fall:**  $|d(R_1, R_2)| = \frac{1}{2}|r_0|$ .

$Q^2$  besitzt auf den zu  $r_{\pm 1}$  senkrechten Quaderseiten Seitenmittelpunkte aus  $\Lambda^2$  und ist somit absolut maximal in  $\Lambda^2$ .

**2. Fall:**  $|d(R_1, R_2)| > \frac{1}{2}|r_0|$ .

In diesem Fall würde  $Q^2$  auf  $r_{\pm 1}$  maximal 2 Gitterpunktpaare aus  $\Lambda^2$  und auf  $r_0$  gar keine nichttrivialen Gitterpunkte aus  $\Lambda^2$  besitzen, was ein Widerspruch zur Voraussetzung von 3 oder 4 Gitterpunktpaaren auf dem Rand von  $Q^2$  ist.  $\square$

2. Die Behauptung folgt aus dem obigen Beweis bzw. wurde von Minkowski für allgemeine konvexe Körper bewiesen (vgl. [1], S. 79).  $\square\square\square$

### Lage der Randpunkte absolut maximaler $\mathcal{M}^2$ -Quader

Nach Satz 2.12 liegen genau 3 oder 4 Gitterpunktpaare des zugrundegelegten Gitters  $\Lambda^2$  mit der Basis  $B_{\Lambda^2} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$  auf dem Rand eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $Q_T^2$ , nämlich die beiden Seitenmittelpunkte  $\pm T$  als Endpunkte der Quaderachse  $t_0$  und 2 bzw. 3 weitere Gitterpunktpaare  $\pm S_i$  auf den zu  $t_0$  parallelen Quaderseiten  $t_{\pm 1}$  (s. Fig. 2.2).

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie die Koordinaten der Gitterpunkte  $\pm S_i$  bezüglich der Basis  $B_{\Lambda^2}$  von den Koordinaten von  $\pm T$  abhängen.

#### Satz 2.15

Sei  $Q_{(x_{t,1}, x_{t,2})}^2$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader im Gitter  $\Lambda^2$  mit der Basis  $B_{\Lambda^2} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ .

Dann gilt für die Koordinaten der Gitterpunkte  $\pm S_i (\pm x_{s_i,1}, \pm x_{s_i,2})_{B_{\Lambda^2}}$  auf dem Rand von  $Q_{(x_{t,1}, x_{t,2})}^2$ :

$$(2.16) \quad |x_{t,1}x_{s_i,2} - x_{t,2}x_{s_i,1}| = 1.$$

**Beweis:** Die Vektoren  $\overrightarrow{OT} =: \underline{t}$  und  $\overrightarrow{OS} =: \underline{s}$  mit einem beliebigen Gitterpunkt  $S(x_{s,1}, x_{s,2})_{B_{\Lambda^2}} \in g_{\pm 1}$  bilden eine Basis  $B'_{\Lambda^2}$  von  $\Lambda^2$  und spannen die Fundamentalzelle  $F_{B'}(\Lambda^2)$  mit dem Flächeninhalt

$$|F_{B'}(\Lambda^2)| = d(\Lambda^2)$$

auf. Dabei gilt für  $F_{B'}(\Lambda^2)$ :

$$\begin{aligned} |F_{B'}(\Lambda^2)| &\stackrel{1.7}{=} |\det(\underline{t}, \underline{s})| \\ &\stackrel{1.3}{=} |\det(x_{t,1}\underline{a}_1 + x_{t,2}\underline{a}_2, x_{s,1}\underline{a}_1 + x_{s,2}\underline{a}_2)| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12} & x_{s,1}a_{11} + x_{s,2}a_{12} \\ x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22} & x_{s,1}a_{21} + x_{s,2}a_{22} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{t,1} & x_{s,1} \\ x_{t,2} & x_{s,2} \end{pmatrix} \right) \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x_{t,1} & x_{s,1} \\ x_{t,2} & x_{s,2} \end{pmatrix} \right| \\ &= d(\Lambda^2) \cdot |x_{t,1}x_{s,2} - x_{t,2}x_{s,1}|. \end{aligned}$$

Wegen  $|F_{B'}(\Lambda^2)| = d(\Lambda^2)$  folgt die Behauptung für sämtliche (Gitter-) Punkte auf  $g_{\pm 1}$ , also auch für  $\pm S_i \in Q_{(x_{t,1}, x_{t,2})}^2$ .  $\square\square\square$

Die Gleichung (2.16) gilt allgemein für *alle* Punkte auf den Gitterpunktgeraden  $g_{\pm 1}$ . Die Koordinaten der Gitterpunkte  $\pm S_i \in t_{\pm 1}$  ergeben sich daraus folgendermaßen:

1.) Die ganzzahligen Lösungen von (2.16) ergeben die Koordinaten der Gitterpunkte auf  $g_{\pm 1}$ .

Diese lassen sich über folgende Kongruenzen errechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{1.Fall:} \quad x_{t,1}x_{s,2} = 1 + x_{t,2}x_{s,1} &\Rightarrow x_{t,1} \mid 1 + x_{t,2}x_{s,1} \\ &\Leftrightarrow 1 + x_{t,2}x_{s,1} \equiv 0 \pmod{x_{t,1}} \\ &\Leftrightarrow x_{t,2}x_{s,1} \equiv -1 \pmod{x_{t,1}} \end{aligned}$$

Wegen  $\text{ggT}(x_{t,1}, x_{t,2}) = 1$  folgt schließlich:

$$x_{s,1} \equiv -x_{t,2}^{-1} \pmod{x_{t,1}}.$$

Für  $x_{s,2}$  ergibt sich aus  $x_{t,2} \mid -1 + x_{t,1}x_{s,2}$  analog

$$x_{s,2} \equiv x_{t,1}^{-1} \pmod{x_{t,2}}.$$

Die Lösungen dieser Kongruenzen seien die Koordinaten der Gitterpunkte auf  $g_1$ .<sup>1</sup>

**2.Fall:** Die ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x_{t,2}x_{s,1} = 1 + x_{t,1}x_{s,2}$$

ergeben gerade die Koordinaten der Spiegelpunkte aus dem 1. Fall auf  $g_{-1}$ . Es genügt also, nur einen der beiden Fälle zu betrachten.

2.) Die Koordinaten der Gitterpunkte  $\pm S_i$ , die auf den Quaderseiten  $t_{\pm 1}$  liegen, lassen sich über das Skalarprodukt der Vektoren  $\underline{t}$  und  $\underline{s}$  berechnen:

Für die senkrechte Projektion  $\underline{s}_t$  des Vektors  $\underline{s}$  auf den Vektor  $\underline{t}$  gilt mit  $\underline{t} \cdot \underline{s}$  als Skalarprodukt von  $\underline{t}$  und  $\underline{s}$ :

$$|\underline{s}_t| = \left| \frac{\underline{t} \cdot \underline{s}}{|\underline{t}|^2} \cdot \underline{t} \right|.$$

Für Gitterpunkte auf  $t_{\pm 1}$  muß daher folgende Bedingung erfüllt sein:

$$|\underline{s}_t| = \left| \frac{\underline{t} \cdot \underline{s}}{|\underline{t}|^2} \cdot \underline{t} \right| \leq |\underline{t}|,$$

also

$$|\underline{t} \cdot \underline{s}| \leq |\underline{t}|^2.$$

---

<sup>1</sup>Durch diese Festlegung ist  $g_1$  und damit auch  $g_{-1}$  eindeutig bestimmt.

Mit

$$\underline{t} = x_{t,1}\underline{a}_1 + x_{t,2}\underline{a}_2$$

und

$$\underline{s} = x_{s,1}\underline{a}_1 + x_{s,2}\underline{a}_2$$

ergibt sich daraus die Ungleichung:

$$\begin{aligned} & | (x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12})(x_{s,1}a_{11} + x_{s,2}a_{12}) + (x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22})(x_{s,1}a_{21} + x_{s,2}a_{22}) | \\ & \leq (x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12})^2 + (x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22})^2. \end{aligned}$$

### Beispiel 2.17

Für den absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{(3,2)}^2$  aus Beispiel 2.4 ergeben sich im Gitter  $\Lambda^2$  mit der Basis

$$B_{\Lambda^2} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2,1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,2 \\ 2,8 \end{pmatrix} \right\}$$

folgende Randpunkte auf  $t_{\pm 1}$ :

1.) Berechnung der Koordinaten der Gitterpunkte auf  $g_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{1. Fall:} \quad 3x_{s,2} = 1 + 2x_{s,1} & \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{s,1} & \equiv -2^{-1} \pmod{3} \\ \Leftrightarrow x_{s,1} & \equiv 1 \pmod{3} \end{aligned} \\ & \quad \begin{aligned} x_{s,2} & \equiv 3^{-1} \pmod{2} \\ \Leftrightarrow x_{s,2} & \equiv 1 \pmod{2} \end{aligned} \end{aligned}$$

2.) Einschränkung der Lösungen auf die Gitterpunkte  $S_i \in t_1$ :

Die Gitterpunkte  $S_i$  müssen die Ungleichung

$$| 3,9 \cdot (2,1x_{s,1} - 1,2x_{s,2}) + 2,6 \cdot (-x_{s,1} + 2,8x_{s,2}) | \leq 21,97$$

erfüllen.

Die Gleichung  $3x_{s,2} = 1 + 2x_{s,1}$  besitzt unter dieser Bedingung die ganzzahligen Lösungen

$$(x_{s_1,1}, x_{s_1,2}) = (1, 1) \quad \text{und} \quad (x_{s_2,1}, x_{s_2,2}) = (-2, -1).$$

Auf  $t_1$  liegen also die Gitterpunkte  $S_1(1, 1)$  und  $S_2(-2, -1)$ . Ihre Spiegelpunkte auf  $t_{-1}$  sind  $-S_1(-1, -1)$  und  $-S_2(2, 1)$ .



### 2.2.2 Seitenverhältnisse

#### Satz 2.18

Sei  $Q_T^2$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  mit der Gitterdeterminante  $d(\Lambda^2)$ .

Dann gilt: Das Seitenverhältnis  $|t_0| : |s_0|$  von  $Q_T^2$  ist von der Form

$$|d(T, O)|^2 : d(\Lambda^2).$$

**Beweis:** Für die Seitenverhältnisse absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_T^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$  gilt mit  $|t_0| \cdot |s_0| \stackrel{2.8}{=} 4 \cdot d(\Lambda^2)$ :

$$|t_0| : |s_0| = |t_0|^2 : 4 \cdot d(\Lambda^2) \stackrel{2.1}{=} |d(T, O)|^2 : d(\Lambda^2). \quad \square\square\square$$

#### Beispiel 2.19

Der absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{(3,2)}^2$  aus Beispiel 2.4 hat im Gitter  $\Lambda^2$  mit der Basis

$$B_{\Lambda^2} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2,1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,2 \\ 2,8 \end{pmatrix} \right\}$$

und der Gitterdeterminante

$$d(\Lambda^2) = |2, 1 \cdot 2, 8 - (-1) \cdot (-1, 2)| = 4, 68$$

das Seitenverhältnis

$$\begin{aligned} |t_0| : |s_0| &= (3 \cdot 2, 1 + 2 \cdot (-1, 2))^2 + (3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2, 8)^2 : 4, 68 \\ &= 21, 97 : 4, 68 \\ &= 4, 69\bar{4} : 1. \end{aligned}$$

Interpretiert man die Achse  $t_0$  von  $Q_T^2$  wie in Korollar 2.10 als absolut maximalen  $\mathcal{M}^1$ -Quader in dem vollständigen Untergitter  $\Lambda^1$  von  $\Lambda^2$  mit der Basis  $B_{\Lambda^1} = \{\underline{t}\}$  und der Gitterdeterminante  $d(\Lambda^1) = |\underline{t}| = |d(T, O)|$ , so gilt für die Seitenverhältnisse absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader (vgl. Satz 3.25):

#### Korollar 2.20

Sei  $Q_T^2$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  mit der Gitterdeterminante  $d(\Lambda^2)$ .

Dann gilt: Das Seitenverhältnis  $|s_0| : |t_0|$  von  $Q_T^2$  ist von der Form

$$|s_0| : |t_0| = d(\Lambda^2) : d(\Lambda^1)^2 = \frac{d(\Lambda^2)}{d(\Lambda^1)} : d(\Lambda^1).$$

mit  $d(\Lambda^1)$  als vollständiges Untergitter von  $\Lambda^2$ .

**Beweis:**  $\checkmark$

**Beispiel 2.21**

Absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_T^2$  im Gitter  $\mathbb{Z}^2$  (Basis  $B_{\mathbb{Z}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ; Gitterdeterminante  $d(\mathbb{Z}^2) = 1$ ) haben Seitenverhältnisse der Form

$$|t_0| : |s_0| = n : 1 \quad \text{mit} \quad \mathbb{N}^* \ni n = x_{t,1}^2 + x_{t,2}^2,$$

wobei  $n$  wegen  $\text{ggT}(x_{t,1}, x_{t,2}) = 1$  immer die Summe von zwei teilerfremden Quadraten ist.

Eine Aussage zur Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von zwei teilerfremden Quadraten, die auch **eigentliche Darstellung** genannt wird, macht der folgende Satz (vgl. [10], S. 70, Satz 52):

**Satz 2.22**

*Die natürliche Zahl  $n$  mit der Primfaktorzerlegung  $n = 2^e p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_s^{e_s}$  besitzt*

- *keine eigentliche Darstellung  $n = x^2 + y^2$ , wenn  $e \geq 2$  oder ein  $p_i \equiv 3 \pmod{4}$  ist,*
- *$2^{s-1}$  verschiedene<sup>2</sup> eigentliche Darstellungen, wenn  $e = 0 \vee 1$  ist und alle  $p_i \equiv 1 \pmod{4}$  sind.*

Die Frage, ob bzw. wieviel absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader man für ein vorgegebenes Seitenverhältnis der Form  $n : 1$  im Gitter  $\mathbb{Z}^2$  konstruieren kann, läßt sich also auf die Frage nach der Primfaktorzerlegung von  $n$  zurückführen. Ist die Primfaktorzerlegung von  $n$  bekannt, so kann man nach Satz 2.22 sofort die Anzahl der eigentlichen Darstellungen von  $n$  angeben.

Jede der eigentlichen Darstellungen einer Zahl der Form  $n = 2^e p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_s^{e_s}$  mit  $e = 0 \vee 1$ ;  $p_i \equiv 1 \pmod{4}$  ergibt dabei die Koordinaten eines ganzzahligen Seitenmittelpunktes eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $Q_T^2$  im  $\mathbb{Z}^2$  mit dem Seitenverhältnis  $|t_0| : |s_0| = n : 1$ .

**Beispiel 2.23**

Für das Seitenverhältnis  $65 : 1$  ergeben sich wegen  $65 = 5 \cdot 13$  genau  $2^{2-1} = 2$  verschiedene eigentliche Darstellungen. Diese sind:

$$65 = 7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2.$$

Daraus erhält man die absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{(7,4)}^2$  und  $Q_{(8,1)}^2$ .

---

<sup>2</sup>Dabei werden in diesem Fall weder die Vorzeichen noch die Reihenfolge der Summanden  $x$  und  $y$  in der eigentlichen Darstellung von  $n$  beachtet.

Für Gitter  $\Lambda^2$  mit einer Basis

$$B_{\Lambda^2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit } a_{ij} \in \mathbb{Z}; i, j = 1, 2$$

lassen sich noch weitere Aussagen über die Form der Seitenverhältnisse absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader treffen:

**Korollar 2.24**

Sei  $\Lambda^2$  ein Gitter mit der Basis  $B_{\Lambda^2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right\}$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{Z}; i, j = 1, 2$  und  $Q_T^2$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in  $\Lambda^2$  mit dem Seitenverhältnis

$$\begin{aligned} |t_0| : |s_0| &= |d(T, O)|^2 : d(\Lambda^2) \\ &= (x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12})^2 + (x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22})^2 : d(\Lambda^2). \end{aligned}$$

Dann gilt:

1. Das Seitenverhältnis von  $Q_T^2$  läßt sich in der Form  $n : m$  mit  $n, m \in \mathbb{N}^*$  darstellen.
2.  $\text{ggT}(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}, x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}) \mid d(\Lambda^2)$ .

**Beweis:**

1. Aus  $x_{t,1}, x_{t,2} \in \mathbb{Z}$  mit  $(x_{t,1}, x_{t,2}) \neq (0, 0)$  und  $a_{ij} \in \mathbb{Z}; i, j = 1, 2$  folgt

$$(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12})^2 + (x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22})^2 \in \mathbb{N}^*$$

und

$$d(\Lambda^2) = |a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}| \in \mathbb{N}^*$$

für das Seitenverhältnis von  $Q_T^2$ . □

2. Sei  $\text{ggT}(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}, x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}) =: \kappa$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\kappa \mid x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12} \quad \wedge \quad \kappa \mid x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22} \\ \Rightarrow &\kappa \mid a_{21}(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}) \quad \wedge \quad \kappa \mid a_{11}(x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}) \\ \Rightarrow &\kappa \mid -(x_{t,1}a_{11}a_{21} + x_{t,2}a_{21}a_{12}) + (x_{t,1}a_{11}a_{21} + x_{t,2}a_{11}a_{22}) \\ \Rightarrow &\kappa \mid x_{t,2}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \\ \Leftrightarrow &\kappa \mid x_{t,2} \cdot d(\Lambda^2). \end{aligned}$$

Analog läßt sich mit

$$\kappa \mid a_{22}(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}) \wedge \kappa \mid a_{12}(x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22})$$

zeigen:

$$\kappa \mid x_{t,1} \cdot d(\Lambda^2).$$

Aus

$$\kappa \mid x_{t,1} \cdot d(\Lambda^2) \wedge \kappa \mid x_{t,2} \cdot d(\Lambda^2)$$

folgt schließlich mit  $\kappa = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$  als Primfaktorzerlegung von  $\kappa$  für alle  $p_j^{\alpha_j}$ ,  $j = 1, \dots, r$ :

$$p_j^{\alpha_j} \mid d(\Lambda^2) \vee p_j \mid x_{t,1}$$

und

$$p_j^{\alpha_j} \mid d(\Lambda^2) \vee p_j \mid x_{t,2}.$$

Wegen  $\text{ggT}(x_{t,1}, x_{t,2}) = 1$  gilt daher für alle  $p_j^{\alpha_j}$ ,  $j = 1, \dots, r$ :

$$p_j^{\alpha_j} \mid d(\Lambda^2),$$

also

$$\kappa \mid d(\Lambda^2). \quad \square\square\square$$

### Bemerkung 2.25

Das Seitenverhältnis eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $Q_T^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$  mit der Basis  $B_{\Lambda^2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right\}$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ ;  $i, j = 1, 2$  läßt sich also für

$$\text{ggT}(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}, x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}) =: \kappa$$

in der Form

$$\frac{\kappa^2}{d(\Lambda^2)} \cdot \left[ \left( \frac{x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}}{\kappa} \right)^2 + \left( \frac{x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}}{\kappa} \right)^2 \right] : 1$$

mit  $\kappa \mid d(\Lambda^2)$  darstellen, wobei  $\left[ \left( \frac{x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}}{\kappa} \right)^2 + \left( \frac{x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}}{\kappa} \right)^2 \right]$  eine Summe von zwei teilerfremden Quadraten natürlicher Zahlen ist und somit nach Satz 2.22 die Primfaktorzerlegung

$$n = 2^e \cdot p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_s^{e_s} \text{ mit } e = 0 \vee 1, \quad p_i \equiv 1 \pmod{4}$$

besitzt.

**Beispiel 2.26**

In einem Gitter  $\Lambda_{\mathbb{P}}^2$  mit der Basis  $B_{\Lambda_{\mathbb{P}}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right\}$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{Z}; i, j = 1, 2$  und der Determinante  $d(\Lambda_{\mathbb{P}}^2) \in \mathbb{P}$  gilt nach Bemerkung 2.25:

$$\kappa = 1 \vee \kappa = d(\Lambda_{\mathbb{P}}^2).$$

Damit haben Seitenverhältnisse absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem solchen Gitter für  $\kappa = 1$  die Form

$$\frac{1}{d(\Lambda_{\mathbb{P}}^2)} \cdot 2^e \cdot p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_s^{e_s} : 1, \quad e = 0 \vee 1, \quad p_i \equiv 1 \pmod{4}$$

und für  $\kappa = d(\Lambda_{\mathbb{P}}^2)$  die Form

$$d(\Lambda_{\mathbb{P}}^2) \cdot 2^e \cdot p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_s^{e_s} : 1, \quad e = 0 \vee 1, \quad p_i \equiv 1 \pmod{4},$$

sind in diesem letzten Fall also immer von der Form  $n : 1$  mit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Der Fall  $\kappa = 1$  wird dabei für

$$(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}) \vee (x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}) \not\equiv 0 \pmod{d(\Lambda_{\mathbb{P}}^2)}$$

angenommen, der Fall  $\kappa = d(\Lambda_{\mathbb{P}}^2)$  für

$$(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}) \wedge (x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}) \equiv 0 \pmod{d(\Lambda_{\mathbb{P}}^2)}.$$

Im Gitter  $\Lambda^2$  mit der Basis  $B_{\Lambda^2} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  und der Determinante  $d(\Lambda^2) = 3 \in \mathbb{P}$  gilt z.B.:

$x_{t,1}$	$x_{t,2}$	$x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}$	$x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}$	$\kappa$	$ t_0  :  s_0 $
1	0	-1	1	1	$\frac{2}{3} : 1$
0	1	2	1	1	$\frac{5}{3} : 1$
1	1	1	2	1	$\frac{5}{3} : 1$
1	-1	-3	0	3	$3 : 1$
2	1	0	3	3	$3 : 1$
2	-1	-4	1	1	$\frac{17}{3} : 1$
1	2	3	3	3	$6 : 1$
1	-2	-5	-1	1	$\frac{26}{3} : 1$
3	1	-1	4	1	$\frac{17}{3} : 1$
3	-1	-5	2	1	$\frac{29}{3} : 1$
1	3	5	4	1	$\frac{41}{3} : 1$
1	-3	-7	-2	1	$\frac{53}{3} : 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

## 2.3 Maximale $\mathcal{M}^2$ -Quader

Wie in Kapitel 2.2.2 ausgeführt, lassen sich nicht für alle Seitenverhältnisse absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader konstruieren.

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie groß der maximale Flächeninhalt eines  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $Q_{\nu:1}^2$  mit dem Seitenverhältnis  $\nu : 1$ ,  $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$ , der ggf. kein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader ist, bezüglich eines Gitters  $\Lambda^2$  werden kann.

### Hilfssatz 2.27

*Ein  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{\nu:1}^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$ , der das feste Seitenverhältnis*

$$\nu : 1, \nu \in \mathbb{R}_{>0}$$

*besitzt, kann nur dann ein maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader bezüglich  $\nu$  sein, wenn er mit einer Quaderachse auf Gitterpunkte aus  $\Lambda^2$  ausgerichtet ist.*

**Beweis:**  $Q_{\nu:1}^2$  wird mindestens durch ein, nach Satz 2.14 maximal durch 4 Gitterpunktpaare begrenzt. Es sind also folgende Fälle zu unterscheiden:

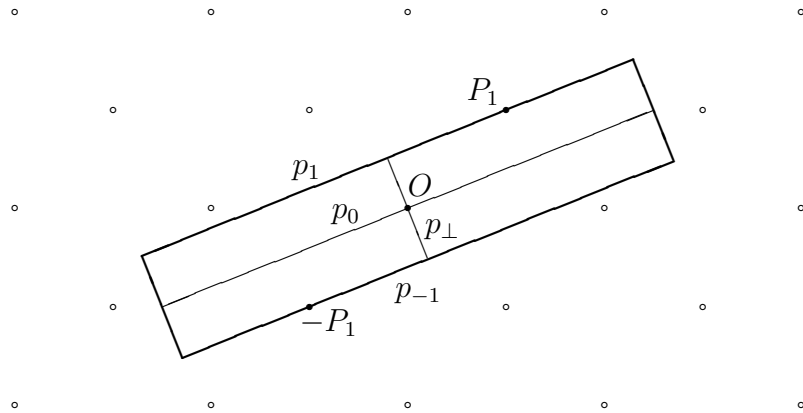
**1. Fall:**  $Q_{\nu:1}^2$  wird durch genau ein Gitterpunktpaar  $\pm P_1 \in \Lambda^2$  auf den Quaderseiten  $p_1$  und  $p_{-1}$  begrenzt (s. Fig. 2.28).

**1.1. Fall:**  $\pm P_1$  sind Seitenmittelpunkte von  $p_1$  und  $p_{-1}$ .

$Q_{\nu:1}^2$  ist in diesem Fall mit der zu  $p_1$  und  $p_{-1}$  senkrechten Achse  $p_\perp$  auf die Gitterpunkte  $\pm P_1$  ausgerichtet.

**1.2. Fall:**  $\pm P_1$  sind keine Seitenmittelpunkte von  $p_1$  und  $p_{-1}$ .

**Figur 2.28**



**Beh.:**  $Q_{\nu:1}^2$  kann in diesem Fall nicht seinen maximalen Flächeninhalt annehmen.

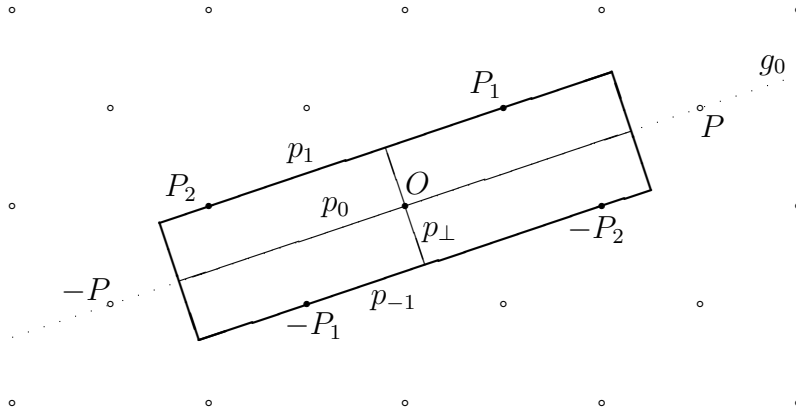
**Bew.:** Dreht man  $Q_{\nu:1}^2$  mit der Achse  $p_{\perp}$  in Richtung  $\pm P_1$  (s. Fig. 2.28), so liegen - bei hinreichend kleiner Drehung - keine Gitterpunkte mehr auf dem Rand des Quaders.

Dann kann man  $Q_{\nu:1}^2$  aber bei konstantem Seitenverhältnis weiter ausdehnen, d.h.  $Q_{\nu:1}^2$  kann in diesem Fall nicht der maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader mit dem Seitenverhältnis  $\nu : 1$  im Gitter  $\Lambda^2$  sein.  $\square$

**2. Fall:**  $Q_{\nu:1}^2$  wird durch genau 2 Gitterpunktpaare  $\pm P_1$  und  $\pm P_2$  begrenzt.

**2.1. Fall:**  $\pm P_1$  und  $\pm P_2$  liegen auf den sich gegenüberliegenden Seiten  $p_1$  und  $p_{-1}$  von  $Q_{\nu:1}^2$  (s. Fig. 2.29).

**Figur 2.29**



Nach Bemerkung 2.1 liegen sämtliche weiteren Gitterpunkte von  $\Lambda^2$  auf zu  $p_1$  und  $p_{-1}$  parallelen Gitterpunktgeraden.

Auf der Gitterpunktgerade  $g_0$ , auf der die zu  $p_1$  und  $p_{-1}$  parallele Quaderachse  $p_0$  liegt, befinden sich also - außerhalb von  $Q_{\nu:1}^2$  - weitere Gitterpunkte  $\pm P$ , auf die  $p_0$  ausgerichtet ist (s. Fig. 2.29).

**2.2. Fall:**  $\pm P_1$  liegen auf  $p_1$  und  $p_{-1}$  und  $\pm P_2$  auf den dazu senkrechten Seiten von  $Q_{\nu:1}^2$  (s. Fig. 2.31).

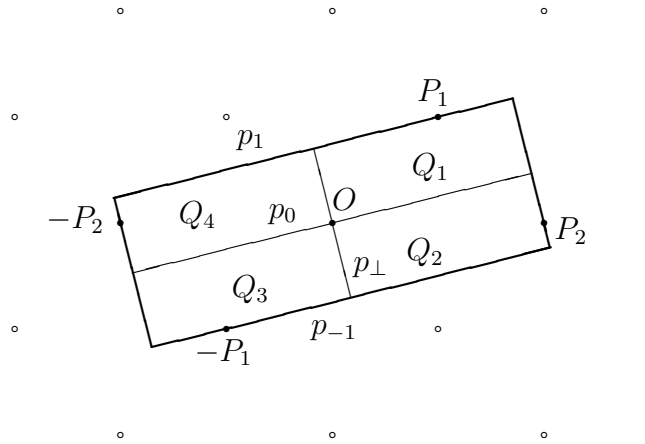
**2.2.1. Fall:**  $\pm P_1$  oder  $\pm P_2$  sind Seitenmittelpunkte von  $Q_{\nu:1}^2$ .

$Q_{\nu:1}^2$  ist entweder mit der Achse  $p_{\perp}$  auf die Gitterpunkte  $\pm P_1$  oder mit der Achse  $p_0$  auf  $\pm P_2$  ausgerichtet.

**Bemerkung 2.30**

Der Fall 2.2.1 kann nicht eintreten, da  $Q_{\nu:1}^2$  demnach ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader sein müßte, der nach Satz 2.12 noch von weiteren Gitterpunkten außer  $\pm P_1$  und  $\pm P_2$  begrenzt wird.

**2.2.2. Fall:**  $\pm P_1$  und  $\pm P_2$  sind keine Seitenmittelpunkte von  $Q_{\nu:1}^2$ .

**Figur 2.31**

**Beh.:**  $Q_{\nu:1}^2$  kann auch in diesem Fall nicht seinen maximalen Flächeninhalt annehmen, da man den Quader wie im Fall 1.2 weiter vergrößern kann, indem man ihn mit der Achse  $p_{\perp}$  in Richtung  $\pm P_1$  dreht (s. Fig. 2.31).

**Bew.:** Da in diesem Fall auf jeder Seite von  $Q_{\nu:1}^2$  ein begrenzender Gitterpunkt liegt, muß noch gezeigt werden, daß eine solche Drehung auch tatsächlich durchführbar ist:

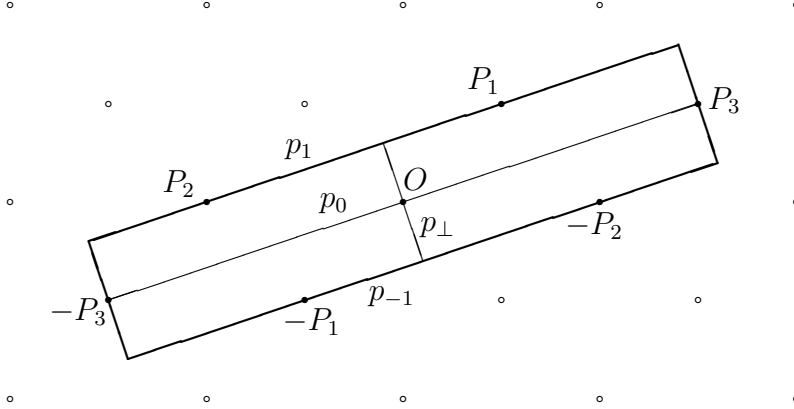
Teilt man  $Q_{\nu:1}^2$  durch die Achsen  $p_0$  und  $p_{\perp}$  in 4 Quadere  $Q_1, \dots, Q_4$ , so kann in dem Fall, daß  $\pm P_1$  und  $\pm P_2$  *nicht* die Mittelpunkte von  $p_1$  und  $p_{-1}$  bzw. den dazu senkrechten Quaderseiten sind, nicht mehr als ein nichttrivialer Gitterpunkt auf dem Rand eines solchen Quaders  $Q_1, \dots, Q_4$  liegen, da ansonsten jeweils ein weiterer Gitterpunkt im Innern von  $Q_{\nu:1}^2$  liegen würde (vgl. Bew. zu Satz 2.8, 3. Fall).

Dreht man  $Q_{\nu:1}^2$  nun mit  $p_{\perp}$  in Richtung  $\pm P_1$ , so wird der Quader von möglichen Randpunkten  $\pm P_1$  bzw.  $\pm P_2$  weggedreht,  $Q_{\nu:1}^2$  läßt sich also bei konstantem Seitenverhältnis wie in Fall 1.2 weiter vergrößern und kann somit nicht maximal bezüglich  $\nu$  sein.  $\square$



**3. Fall:**  $Q_{\nu:1}^2$  wird durch  $\geq 3$  Gitterpunktpaare  $\pm P_i$  begrenzt (s. Fig. 2.32).

**Figur 2.32**



In diesem Fall handelt es sich bei  $Q_{\nu:1}^2$  nach Satz 2.14 um einen absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quader. Nach Satz 2.8 sind also mindestens zwei der Seitenmittelpunkte von  $Q_{\nu:1}^2$  - auf die die Quaderachsen  $p_\perp$  und  $p_0$  ausgerichtet sind - Gitterpunkte von  $\Lambda^2$  (s. Fig. 2.32).

Damit ist gezeigt, daß stets ein größerer Quader  $Q_{\nu:1}^2$  mit dem Seitenverhältnis  $\nu : 1$  existiert, wenn keine der Quaderachsen von  $Q_{\nu:1}^2$  auf ein Gitterpunktpaar aus  $\Lambda^2$  ausgerichtet ist.  $\square\square\square$

Ein  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{\nu:1}^2$  mit dem Seitenverhältnis  $\nu : 1$ ,  $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$  kann in einem Gitter  $\Lambda^2$  mit der Basis  $B_{\Lambda^2} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$  seinen maximalen Flächeninhalt also nur dann annehmen, wenn er mit (mindestens) einer seiner Achsen auf ein Gitterpunktpaar

$$\pm T(\pm x_{t,1}, \pm x_{t,2})_{B_{\Lambda^2}} \in \Lambda^2 \quad \text{mit} \quad \text{ggT}(x_{t,1}, x_{t,2}) = 1$$

ausgerichtet ist, unabhängig davon, ob es sich dabei um einen absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quader handelt oder nicht.

Bezeichnet man nun die Achse eines nicht absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$ , die auf  $\pm T$  ausgerichtet ist, mit  $\tilde{t}_0$  und die dazu senkrechte Achse mit  $\tilde{s}_0$  und legt o.B.d.A. das Seitenverhältnis von  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$  mit  $|\tilde{t}_0| : |\tilde{s}_0| = \nu : 1$  fest, so gilt:

$$(2.33) \quad V(\tilde{Q}_{\nu:1}^2) = |\tilde{t}_0| \cdot |\tilde{s}_0| = \frac{|\tilde{t}_0|^2}{\nu} = \nu \cdot |\tilde{s}_0|^2 < 4 \cdot d(\Lambda^2).$$

**Bemerkung 2.34**

1. Für nicht absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader kommen nach dem Beweis von Hilfssatz 2.27 nur 2 Lagen in Frage, in denen ihr maximaler Flächeninhalt angenommen werden kann.  
Dabei liegen die Gitterpunkte  $\pm T$  in einem Fall auf dem Rand des Quaders (Fall 1.1), im anderen Fall außerhalb (Fall 2.1).
2. Ist ein nicht absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$  mit beiden Quaderachsen auf Gitterpunkte aus  $\Lambda^2$  ausgerichtet, so gilt:
  - Liegt genau ein Gitterpunktpaar auf dem Rand von  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$ , so liegt Fall 1.1 vor, d.h.  $\tilde{t}_0$  ist diejenige Achse, die auf diese Gitterpunkte ausgerichtet ist.
  - Liegen 2 Gitterpunktpaare auf dem Rand von  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$ , so liegt Fall 2.1 vor. In diesem Fall ist  $\tilde{t}_0$  also die zu den Quaderseiten, auf denen die Gitterpunkte liegen, parallele Achse von  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$ .

Bei der Frage, auf welches Gitterpunktpaar  $\pm T$  man  $\tilde{t}_0$  ausrichten muß, damit der Flächeninhalt von  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$  möglichst groß wird, lassen sich also die beiden folgenden Fälle unterscheiden:

**1. Fall:**  $\pm T \in \tilde{Q}_{\nu:1}^2$  (vgl. Beweis von 2.27, Fall 1.1 mit  $\pm P_1 = \pm T$ ).

In diesem Fall existiert immer ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_T^2 =: Q_{\nu_k:1}^2$  mit dem Seitenverhältnis

$$|t_0| : |s_0| = \nu_k : 1, \quad \nu_k \in \mathbb{R}_{>0}$$

und dem Flächeninhalt

$$(2.35) \quad V(Q_{\nu_k:1}^2) = |t_0| \cdot |s_0| = \frac{|t_0|^2}{\nu_k} = 4 \cdot d(\Lambda^2),$$

der auch auf  $\pm T$  ausgerichtet ist. Wegen  $|\tilde{t}_0| = |t_0|$  läßt sich der Flächeninhalt  $V_k(\tilde{Q}_{\nu:1}^2)$  von  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$  dabei in Abhängigkeit des Seitenverhältnisses von  $Q_{\nu_k:1}^2$  angeben:

$$(2.36) \quad V_k(\tilde{Q}_{\nu:1}^2) = |t_0| \cdot |\tilde{s}_0| \stackrel{2.33}{=} \frac{|t_0|^2}{\nu} \stackrel{2.35}{=} 4 \frac{\nu_k}{\nu} \cdot d(\Lambda^2).$$

Nach Konstruktion ist  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$  "schmäler" als  $Q_{\nu_k:1}^2$ , also ist  $\nu_k < \nu$ . Das Maximum von  $V_k(\tilde{Q}_{\nu:1}^2)$  wird daher angenommen, wenn  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$  auf die Seitenmittelpunkte  $\pm T$  des absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders mit dem nächst kleineren Seitenverhältnis ausgerichtet ist.

**2. Fall:**  $\pm T \notin \tilde{Q}_{\nu:1}^2$  (vgl. Beweis von 2.27, Fall 2.1 mit  $\pm P = \pm T$ ).

In diesem Fall liegen weitere Randpunkte  $\pm S_i \in \Lambda^2$  des absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $Q_T^2 =: Q_{\nu_g:1}^2$  mit dem Seitenverhältnis

$$|t_0| : |s_0| = \nu_g : 1, \quad \nu_g \in \mathbb{R}_{>0},$$

der auch auf  $\pm T$  ausgerichtet ist, auf  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$ . Analog zum 1. Fall lässt sich wegen  $|\tilde{s}_0| = |s_0|$  der Flächeninhalt  $V_g(\tilde{Q}_{\nu:1}^2)$  von  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$  in Abhängigkeit des Seitenverhältnisses von  $Q_{\nu_g:1}^2$  angeben:

$$(2.37) \quad V_g(\tilde{Q}_{\nu:1}^2) = |\tilde{t}_0| \cdot |s_0| = \nu \cdot |s_0|^2 = 4 \frac{\nu}{\nu_g} \cdot d(\Lambda^2).$$

$\tilde{Q}_{\nu:1}^2$  ist in diesem Fall "kürzer" als  $Q_{\nu_g:1}^2$ , also ist  $\nu < \nu_g$ . Das Maximum von  $V_g(\tilde{Q}_{\nu:1}^2)$  wird daher angenommen, wenn  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$  auf die Seitenmittelpunkte  $\pm T$  des absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders mit dem nächst größeren Seitenverhältnis ausgerichtet ist.

Um den maximal möglichen Flächeninhalt für nicht absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$  zu berechnen, braucht man also nur anhand der Gleichungen (2.36) und (2.37) die maximalen Flächeninhalte von  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$  in Abhängigkeit der absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{\nu_k:1}^2$  und  $Q_{\nu_g:1}^2$  mit dem nächst kleineren bzw. dem nächst größeren Seitenverhältnis zu berechnen. Der größere dieser beiden Flächeninhalte ist dann der maximale Flächeninhalt von  $\tilde{Q}_{\nu:1}^2$ . Insgesamt folgt also für beliebige  $\mathcal{M}^2$ -Quader:

### Satz 2.38

Sei  $Q_{\nu:1}^2$  ein  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  mit dem Seitenverhältnis  $\nu : 1, \nu \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Des weiteren seien  $Q_{\nu_k:1}^2$  und  $Q_{\nu_g:1}^2$  diejenigen absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quader mit dem nächst kleineren bzw. nächst größeren Seitenverhältnis  $\nu_k : 1, \nu \geq \nu_k \in \mathbb{R}_{>0}$  bzw.  $\nu_g : 1, \nu \leq \nu_g \in \mathbb{R}_{>0}$  in  $\Lambda^2$ .

Dann gilt für den maximalen Flächeninhalt  $V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)$  von  $Q_{\nu:1}^2$ :

$$\begin{aligned} V_{\max}(Q_{\nu:1}^2) &= \max ( V_k(Q_{\nu:1}^2), V_g(Q_{\nu:1}^2) ) \\ &= \max \left( 4 \frac{\nu_k}{\nu} \cdot d(\Lambda^2), 4 \frac{\nu}{\nu_g} \cdot d(\Lambda^2) \right) \end{aligned}$$

für die entsprechenden Werte von  $\nu_k$  und  $\nu_g$ .

**Beweis:**  $\checkmark$

**Bemerkung 2.39**

1. Wegen

$$V_k(Q_{\nu:1}^2) = 4 \frac{\nu_k}{\nu} \cdot d(\Lambda^2) = \nu_k \nu_g \cdot \frac{4}{\nu_g \nu} \cdot d(\Lambda^2)$$

und

$$V_g(Q_{\nu:1}^2) = 4 \frac{\nu}{\nu_g} \cdot d(\Lambda^2) = \nu^2 \cdot \frac{4}{\nu_g \nu} \cdot d(\Lambda^2)$$

muß nur geprüft werden, ob

$$\nu_k \nu_g \geq \nu^2 \text{ oder } \nu_k \nu_g \leq \nu^2$$

gilt, um zu entscheiden, welches die maximale Lage von  $Q_{\nu:1}^2$  ist.

2. Betrachtet man die Funktion  $V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)$  für beliebige  $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$ , so gilt:

- i) Innerhalb eines Intervalls  $[\nu_k, \nu_g]$  werden für kleine  $\nu$  die maximalen Flächeninhalte von  $V_k(Q_{\nu:1}^2)$  gebildet, für große  $\nu$  von  $V_g(Q_{\nu:1}^2)$ .
- ii) Da  $V_k(Q_{\nu:1}^2)$  streng monoton fallend und  $V_g(Q_{\nu:1}^2)$  streng monoton wachsend ist, existiert genau ein Minimum pro Intervall  $[\nu_k, \nu_g]$ , und zwar nach 1. für das Seitenverhältnis

$$\nu_{\min} : 1 = \sqrt{\nu_k \nu_g} : 1.$$

Der Flächeninhalt ist in diesem Fall

$$V_k(Q_{\nu_{\min}:1}^2) = V_g(Q_{\nu_{\min}:1}^2) = 4 \sqrt{\frac{\nu_k}{\nu_g}} \cdot d(\Lambda^2).$$

iii) Die Maxima

$$\max(V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)) = 4 \cdot d(\Lambda^2)$$

von  $V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)$  werden gerade an den Intervallrändern von  $[\nu_k, \nu_g]$  angenommen, da hier Seitenverhältnisse absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader vorliegen.

Die Minima der einzelnen Teilintervalle  $[\nu_k, \nu_g]$  hängen für ein Gitter  $\Lambda^2$  also nur von den Seitenverhältnissen  $\nu_k : 1$  und  $\nu_g : 1$  der absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quader, die die Intervallränder bestimmen, ab.

Das Problem ist, daß die Seitenverhältnisse absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader im allgemeinen keine regelmäßigen Abstände zueinander haben. Wäre dies der Fall, so könnte man den Flächeninhalt eines maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $Q_{\nu:1}^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$  direkt nach unten abschätzen.

Für das Gitter  $\mathbb{Z}^2$ , das ich in meiner Examensarbeit untersucht habe, läßt sich eine solche Abschätzung allerdings für  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{\nu:1}^2$  mit einem Seitenverhältnis  $\nu : 1$ ,  $1 \leq \nu \in \mathbb{R}$  durchführen:

### 2.3.1 Maximale $\mathcal{M}^2$ -Quader im $\mathbb{Z}^2$

#### Bemerkung 2.40

Das Seitenverhältnis  $|t_0| : |s_0|$  eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $Q_T^2$  im Gitter  $\mathbb{Z}^2$  ist nach Beispiel 2.21 von der Form

$$x_{t,1}^2 + x_{t,2}^2 : 1$$

mit  $x_{t,1}, x_{t,2} \in \mathbb{Z}$  beliebig für  $\text{ggT}(x_{t,1}, x_{t,2}) = 1$ .

Diese Seitenverhältnisse sind also von der Form  $n : 1$  mit  $n \in \mathbb{N}^*$ , wobei sich  $n$  als Summe von zwei teilerfremden Quadraten darstellen läßt und somit nach Satz 2.22 die Primfaktorzerlegung

$$n = 2^e \cdot p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_s^{e_s}$$

mit  $e = 0 \vee 1$  und  $p_i \equiv 1(4)$ ,  $i = 1, \dots, s$  besitzt.

#### Beispiel 2.41

In der folgenden Tabelle sind alle Seitenverhältnisse  $n : 1$  bis  $n = 58$  angegeben, für die absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_T^2$  im  $\mathbb{Z}^2$  existieren:<sup>3</sup>

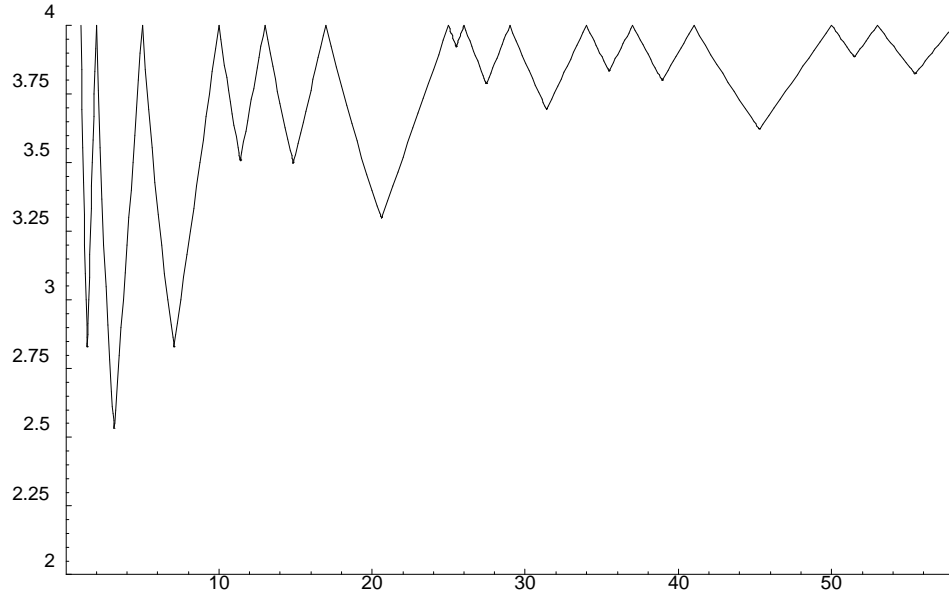
Seitenverhältnis	$T(x_{t,1}, x_{t,2})$	Primfaktorzerlegung von $n$
1 : 1	(1, 0)	1 = 1
2 : 1	(1, 1)	2 = 2
5 : 1	(2, 1)	5 = 5
10 : 1	(3, 1)	10 = 2 · 5
13 : 1	(3, 2)	13 = 13
17 : 1	(4, 1)	17 = 17
25 : 1	(4, 3)	25 = 5 <sup>2</sup>
26 : 1	(5, 1)	26 = 2 · 13
29 : 1	(5, 2)	29 = 29
34 : 1	(5, 3)	34 = 2 · 17
37 : 1	(6, 1)	37 = 37
41 : 1	(5, 4)	41 = 41
50 : 1	(7, 1)	50 = 2 · 5 <sup>2</sup>
53 : 1	(7, 2)	53 = 53
58 : 1	(7, 3)	58 = 2 · 29
⋮	⋮	⋮

<sup>3</sup>Dabei werden nur die Seitenmittelpunkte eines absolut maximalen Quaders  $Q_T^2$  pro eigentlicher Darstellung eines Seitenverhältnisses aufgeführt (vgl. Bsp. 2.21), d.h. es ist z.B.  $(3, 1) \sim (1, 3) \sim (-1, 3) \sim (-3, 1)$ .

Der maximale Flächeninhalt, den ein  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{\nu:1}^2$  mit dem Seitenverhältnis  $\nu : 1, \nu \in \mathbb{R}_{>0}$  im  $\mathbb{Z}^2$  annehmen kann, ist nach Satz 2.38

$$V_{\max}(Q_{\nu:1}^2) = \max \left( 4 \frac{\nu_k}{\nu}, 4 \frac{\nu}{\nu_g} \right).$$

Mit  $\nu_k = n_k \in \mathbb{N}^*$  und  $\nu_g = n_g \in \mathbb{N}^*$  aus Beispiel 2.41 ergibt sich im Intervall  $[1, 58]$  folgende Funktion:



Dabei lassen sich die Minima der jeweiligen Teilintervalle  $[n_k, n_g]$  von  $V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)$  nach unten abschätzen:

**Satz 2.42**

*Für den maximalen Flächeninhalt eines  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $Q_{\nu:1}^2$  im Gitter  $\mathbb{Z}^2$  mit dem Seitenverhältnis  $\nu : 1, 1 \leq \nu \in \mathbb{R}$  gilt:*

$$V_{\max}(Q_{\nu:1}^2) \geq 4\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

**Beweis:** Die Minima der Teilintervalle  $[n_k, n_g]$  von  $V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)$  hängen nach Bemerkung 2.39 nur von den Intervallgrenzen  $n_k$  und  $n_g$  ab:

$$\min(V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)) = 4\sqrt{\frac{n_k}{n_g}} \cdot d(\Lambda^2) = 4\sqrt{\frac{n_k}{n_g}}.$$

Um die Behauptung zu beweisen, muß also für alle Intervalle  $[n_k, n_g]$  gezeigt werden:

$$n_g \leq \frac{5}{2}n_k.$$

**1. Fall:**  $n_k$  ungerade

Nach Satz 2.22 gilt für eine ungerade Zahl  $n_k = 2^0 \cdot p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_s^{e_s}$ , die eine eigentliche Darstellung besitzt, daß sich auch  $2n_k = 2^1 \cdot p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_s^{e_s}$  auf diese Art darstellen läßt.

Da im Gitter  $\mathbb{Z}^2$  sämtliche eigentliche Darstellungen angenommen werden, läßt sich  $n_g$  in diesem Fall durch

$$n_g \leq 2n_k$$

abschätzen.

**2. Fall:**  $n_k$  gerade

Für eine gerade Zahl  $n_k = 2^1 \cdot p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_s^{e_s}$  mit einer eigentlichen Darstellung besitzt nach Satz 2.22 auch die Zahl  $\frac{5}{2}n_k = 2^0 \cdot 5 \cdot p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_s^{e_s}$  eine solche Darstellung.

Ist also  $n_k$  gerade, so existiert eine Zahl  $n_g$ , für die gilt:

$$n_g \leq \frac{5}{2}n_k.$$

Somit gilt für die Minima der Flächeninhalte maximal ausgedehnter  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{\nu:1}^2$  im  $\mathbb{Z}^2$ :

**1. Fall:**  $\min_1(V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)) \geq 4\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 2,828$  für  $n_k$  ungerade.

**2. Fall:**  $\min_2(V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)) \geq 4\sqrt{\frac{2}{5}} \approx 2,530$  für  $n_k$  gerade.

Das Gesamtminimum von  $V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)$  ist also

$$\min(V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)) = \min_2(V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)) = 4\sqrt{\frac{2}{5}}. \quad \square\square\square$$

### Bemerkung 2.43

Das Gesamtminimum  $\min(V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)) = 4\sqrt{\frac{2}{5}}$  wird auch tatsächlich angenommen, z.B. im Intervall  $[2, 5]$ .

Dabei handelt es sich um den Quader  $Q_{\sqrt{10}:1}^2$  mit dem Seitenverhältnis

$$\nu_{\min} : 1 = \sqrt{n_k n_g} : 1 = \sqrt{10} : 1.$$

Für große Seitenverhältnisse  $\nu : 1$  streben die Minima der maximalen Flächeninhalte in den einzelnen Teilintervallen  $[n_k, n_g]$  gegen den Grenzwert 4, obwohl sie nicht monoton größer werden.

Diese Schwankungen werden wie bereits erwähnt durch die unterschiedlichen Abstände zweier benachbarter Seitenverhältnisse  $n_k : 1$  und  $n_g : 1$  hervorgerufen. Je größer die Differenz  $\Delta := n_g - n_k$  ist, desto kleiner wird das Verhältnis  $\frac{n_k}{n_g}$ , und deshalb schwankt der Flächeninhalt der Minima von  $V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)$ .

Man findet aber für jede Zahl  $\nu \geq 2$  eine natürliche Zahl  $a \neq 0$  mit

$$a^2 + 1 \leq \nu \quad \text{und} \quad (a+1)^2 + 1 \geq \nu.$$

Wegen  $\text{ggT}(a, 1) = 1$  und  $\text{ggT}(a+1, 1) = 1$  besitzen sowohl  $a^2 + 1$  als auch  $(a+1)^2 + 1$  eine eigentliche Darstellung und es gilt:

$$n_k \geq a^2 + 1 \quad \text{und} \quad n_g \leq (a+1)^2 + 1.$$

Für die Minima von  $V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)$  gilt daher mit  $a \neq 0$ :

$$\min(V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)) = 4\sqrt{\frac{n_k}{n_g}} \geq 4\sqrt{\frac{a^2 + 1}{(a+1)^2 + 1}} = 4\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{a^2}}{1 + \frac{2}{a} + \frac{2}{a^2}}}.$$

Der Grenzübergang  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \min(V_{\max}(Q_{\nu:1}^2))$  läßt sich wegen

$$\nu \leq n_g \leq (a+1)^2 + 1$$

auf  $\lim_{a \rightarrow \infty} \min(V_{\max}(Q_{\nu:1}^2))$  übertragen:

$$4 \geq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \min(V_{\max}(Q_{\nu:1}^2)) \geq \lim_{a \rightarrow \infty} 4\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{a^2}}{1 + \frac{2}{a} + \frac{2}{a^2}}} = 4.$$

Da nun die Minima der einzelnen Teilintervalle den Grenzwert 4 besitzen, folgt allgemein:

#### Satz 2.44

*Für die maximalen Flächeninhalte von  $\mathcal{M}^2$ -Quadern  $Q_{\nu:1}^2$  im Gitter  $\mathbb{Z}^2$  mit dem Seitenverhältnis  $\nu : 1, \nu \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt:*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} V_{\max}(Q_{\nu:1}^2) = 4.$$

**Beweis:**     $\checkmark$



# Kapitel 3

## Absolut maximale $\mathcal{M}^3$ -Quader

In diesem Kapitel werden 3-dimensionale Minkowski-Quader in einem allgemeinen Gitter  $\Lambda^3$  untersucht.

Von besonderem Interesse sind dabei wieder die Konstruktion und Eigenschaften absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader.

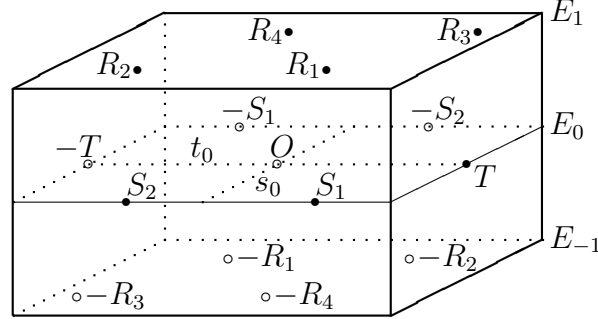
### 3.1 Konstruktion

Ausgehend von der Konstruktion absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in Kapitel 2.1 wird ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader in einem 3-dimensionalen Gitter  $\Lambda^3$  mit der Basis  $B_{\Lambda^3} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$  folgendermaßen erzeugt:

1. Man beginnt mit einer nullpunktsymmetrischen Strecke  $\overline{T}, -\overline{T} =: t_0$  für zwei Gitterpunkte

$$\pm T(\pm x_{t,1}, \pm x_{t,2}, \pm x_{t,3})_{B_{\Lambda^3}} \in \Lambda^3 \quad \text{mit} \quad \text{ggT}(x_{t,1}, x_{t,2}, x_{t,3}) = 1.$$

2. Ausgehend von  $t_0$  konstruiert man mit 4 oder 6 weiteren Gitterpunkten  $\pm S_i$  einen absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_T^2$  in einem vollständigen 2-dimensionalen Untergitter  $\Lambda^2$  von  $\Lambda^3$  (vgl. Kap. 2.1).
3. Die Gitterpunktebene, in der  $\Lambda^2$  liegt, wird mit  $E_0$  bezeichnet. Alle weiteren Gitterpunkte von  $\Lambda^3$  liegen dann auf zu  $E_0$  parallelen, äquidistanten Gitterpunktebenen  $E_k$  mit  $\Lambda_k^2 \subset E_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ .  
Die senkrechte Projektion von  $Q_T^2$  auf die beiden zu  $E_0$  benachbarten Gitterpunktebenen  $E_{\pm 1}$  ergibt die beiden Quaderseiten  $\mathcal{R}_{\pm 1}$  mit den Gitterpunkten  $\pm R_j \in \Lambda_{\pm 1}^2$ ,  $j \in \mathbb{N}^*$ .
4. Die restlichen 4 Seiten  $\mathcal{S}_{\pm 1}$  und  $\mathcal{T}_{\pm 1}$  mit  $\pm S_i \in \mathcal{S}_{\pm 1}$  und  $\pm T \in \mathcal{T}_{\pm 1}$  ergeben sich schließlich durch Verbinden entsprechender Eckpunkte von  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_{-1}$ .

**Figur 3.1** Ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader  $Q^3$  in einem Gitter  $\Lambda^3$ 

Im folgenden werden nachstehende Bezeichnungen im Zusammenhang mit absolut maximalen  $\mathcal{M}^3$ -Quadern verwendet:

Seiten von  $Q^3$ :  $\mathcal{R}_{\pm 1}$ ,  $\mathcal{S}_{\pm 1}$ ,  $\mathcal{T}_{\pm 1}$

Achsen von  $Q^3$ :  $\mathcal{R}_0 (\triangleq Q_T^2)$ ,  $\mathcal{S}_0$  und  $\mathcal{T}_0$  als zu  $\mathcal{R}_{\pm 1}$ ,  $\mathcal{S}_{\pm 1}$  und  $\mathcal{T}_{\pm 1}$  parallele Quaderachsen

Ausgewählte Punkte von  $Q^3$ :

- Gitterpunkte:  $\pm R_j \in \mathcal{R}_{\pm 1}$ ,  $\pm S_i \in \mathcal{S}_{\pm 1}$ ,  $\pm T \in \mathcal{T}_{\pm 1}$  und  $O$  (Ursprung von  $\Lambda^3$ )
- Seitenmittelpunkte:  $M_{\mathcal{R}_{\pm 1}}$ ,  $M_{\mathcal{S}_{\pm 1}}$  und  $M_{\mathcal{T}_{\pm 1}} (\triangleq \pm T)$  als Seitenmittelpunkte von  $\mathcal{R}_{\pm 1}$ ,  $\mathcal{S}_{\pm 1}$  und  $\mathcal{T}_{\pm 1}$

Ausgewählte Strecken von  $Q^3$ :

- $r_0 := \overline{M_{\mathcal{R}_1}, M_{\mathcal{R}_{-1}}}$ ,  $s_0 := \overline{M_{\mathcal{S}_1}, M_{\mathcal{S}_{-1}}}$  und  $t_0 := \overline{M_{\mathcal{T}_1}, M_{\mathcal{T}_{-1}}}$  als Achsen von  $\mathcal{R}_0$ ,  $\mathcal{S}_0$  und  $\mathcal{T}_0$ <sup>1</sup>
- $r_{\mathcal{S}_{\pm 1}}$ ,  $r_{\mathcal{T}_{\pm 1}}$  als zu  $r_0$  parallele "Achsen"<sup>2</sup> von  $\mathcal{S}_{\pm 1}$  bzw.  $\mathcal{T}_{\pm 1}$  und entsprechend  
 $s_{\mathcal{R}_{\pm 1}}$ ,  $s_{\mathcal{T}_{\pm 1}} (\triangleq s_{\pm 1} \text{ in } Q_T^2)$  als zu  $s_0$  parallele "Achsen" von  $\mathcal{R}_{\pm 1}$  bzw.  $\mathcal{T}_{\pm 1}$  bzw.  
 $t_{\mathcal{R}_{\pm 1}}$ ,  $t_{\mathcal{S}_{\pm 1}} (\triangleq t_{\pm 1} \text{ in } Q_T^2)$  als zu  $t_0$  parallele "Achsen" von  $\mathcal{R}_{\pm 1}$  bzw.  $\mathcal{S}_{\pm 1}$

<sup>1</sup>Dabei sind  $s_0$  und  $t_0$  Achsen von  $\mathcal{R}_0$  usw.

<sup>2</sup>Nach Definition sind  $r_{\mathcal{S}_{\pm 1}}$  und  $r_{\mathcal{T}_{\pm 1}}$  keine Achsen. In diesem Fall sind diejenigen zu  $r_0$  parallelen Strecken gemeint, für die gilt:  $M_{\mathcal{S}_{\pm 1}} \in r_{\mathcal{S}_{\pm 1}}$  und  $M_{\mathcal{T}_{\pm 1}} \in r_{\mathcal{T}_{\pm 1}}$ .

Mindestens eine der Achsen eines derart konstruierten  $\mathcal{M}^3$ -Quaders ist also ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem vollständigen 2-dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^3$ .

Dies ist die charakterisierende Eigenschaft absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader:

**Satz 3.2**

*Ein maximal ausgedehnter  $\mathcal{M}^3$ -Quader  $Q^3$  in einem Gitter  $\Lambda^3$  besitzt genau dann das - nach dem Satz von Minkowski maximale - Volumen*

$$V_{\max}(Q^3) = 2^3 \cdot d(\Lambda^3) = 8 \cdot d(\Lambda^3),$$

*wenn eine der Achsen des Quaders ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem vollständigen 2-dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^3$  ist.*

**Beweis:**

” $\Leftarrow$ ”: Sei  $Q^3$  ein in  $\Lambda^3$  maximal ausgedehnter  $\mathcal{M}^3$ -Quader und  $\Lambda^2 \subset E_0$  das vollständige Untergitter von  $\Lambda^3$ , in dem der absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_T^2$  als Achse von  $Q^3$  liegt.

Da  $\Lambda^2$  vollständig ist, baut sich  $\Lambda^3$  nach Bemerkung 1.9 komplett aus  $\Lambda^2$  und den Nebengittern  $\Lambda_k^2, k \in \mathbb{Z}^*$  von  $\Lambda^2$  auf.

Die beiden Vektoren  $\underline{t} := \overrightarrow{OT}$  und  $\underline{s} := \overrightarrow{OS}$  mit einem beliebigen Gitterpunkt  $S \in t_{\pm 1}$  auf dem Rand von  $Q_T^2$  bilden daher mit einem dritten Vektor  $\underline{r} := \overrightarrow{OR}$  mit  $R \in \Lambda_{\pm 1}^2$  eine Basis von  $\Lambda^3$  und spannen eine Fundamentalzelle

$$F_{\{\underline{r}, \underline{s}, \underline{t}\}}(\Lambda^3) = \{P \mid P = \vartheta_1 \underline{r} + \vartheta_2 \underline{s} + \vartheta_3 \underline{t}; 0 \leq \vartheta_j < 1, j = 1, \dots, 3\}$$

von  $\Lambda^3$  mit dem Volumen

$$(3.3) \quad |(F_{\{\underline{r}, \underline{s}, \underline{t}\}}(\Lambda^3))| = d(\Lambda^3) = d(\Lambda^2) \cdot |d(E_{\pm 1}, E_0)|$$

auf. Des weiteren gilt für das Volumen des im Untergitter  $\Lambda^2$  absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $Q_T^2$ :

$$(3.4) \quad V(Q_T^2) = 4 \cdot d(\Lambda^2).$$

Damit ergibt sich für das Volumen von  $Q^3$ :

$$V(Q^3) = 2 \cdot |d(E_{\pm 1}, Q_T^2)| \cdot V(Q_T^2)$$

$$\stackrel{3.4}{=} 2 \cdot |d(E_{\pm 1}, E_0)| \cdot 4 d(\Lambda^2)$$

$$\stackrel{3.3}{=} 8 \cdot d(\Lambda^3).$$

□

Um zu zeigen, daß ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^3$  mindestens eine Achse besitzt, die ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem vollständigen Untergitter von  $\Lambda^3$  ist, werden zuerst die beiden folgenden Hilfssätze bewiesen:

### Hilfssatz 3.5

*Für einen  $\mathcal{M}^3$ -Quader  $Q^3$  in einem Gitter  $\Lambda^3$ , der das maximale Volumen  $V_{\max}(Q^3) = 8 \cdot d(\Lambda^3)$  annimmt, gibt es nur drei Lagemöglichkeiten für Gitterpunkte im Innern seiner Seiten:*

1. *Der Seitenmittelpunkt ist ein Gitterpunkt.*
2. *Es liegen  $\geq 3$  Gitterpunkte im Innern einer Quaderseite, die nicht alle auf einer Gerade liegen.*
3. *Es liegen 2 Gitterpunkte auf einer Gerade durch den Seitenmittelpunkt (der dann kein Gitterpunkt ist).<sup>3</sup>*

**Beweis:** Liegen die Gitterpunkte nicht wie oben beschrieben, so läßt sich  $Q^3$  durch Kippen von zwei sich gegenüberliegenden Seiten in ein nullpunktsymmetrisches Parallelotop  $P^3$  größeren Volumens überführen, das auch den Voraussetzungen des Satzes von Minkowski genügt, d.h. es gilt:

$$8 \cdot d(\Lambda^3) \geq V(P^3) > V(Q^3)$$

(vgl. Beweis zu Satz 2.8, 2. Fall). □□□

### Hilfssatz 3.6

*Sei  $\Lambda^n$  ein Gitter im  $\mathbb{R}^n$  mit der Basis  $B_{\Lambda^n} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ . Des weiteren sei  $\Lambda^{n-k}$  das vollständige  $(n-k)$ -dimensionale Untergitter von  $\Lambda^n$  mit der Basis  $B_{\Lambda^{n-k}} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-k}\}$  im Unterraum  $U_0^{n-k}$  und  $Q$  ein abgeschlossener  $(n-k)$ -dimensionaler Quader in  $U_0^{n-k}$ , in dem  $(n-k+1)$  linear unabhängige Gitterpunkte aus  $\Lambda^{n-k}$  liegen.*

*Dann gilt: Liegen mindestens  $n-k$  dieser Gitterpunkte im Innern  $\overset{\circ}{Q}$ , so liegt in jedem Translat*

$$Q' := Q_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}, \mu_1, \dots, \mu_k} = \{\underline{q} + (\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_{n-k} \underline{a}_{n-k} + \mu_1 \underline{a}_{n-k+1} + \dots + \mu_k \underline{a}_n) \mid \underline{q} \in Q\} \in U_i^{n-k}$$

*mit  $\lambda_l \in \mathbb{R}$ ;  $\mu_m \in \mathbb{Z}$ ;  $l = 1, \dots, n-k$ ;  $m = 1, \dots, k$  und  $i \in \mathbb{Z}$*

*von  $Q$  mindestens ein innerer Gitterpunkt.*

---

<sup>3</sup>Mehr als 2 Gitterpunkte können auf einer solchen Gerade nicht liegen, da ansonsten nichttriviale Gitterpunkte im Innern von  $Q^3$  liegen würden.

**Beweis:** Seien  $P_1, \dots, P_{n-k+1}$  ( $n - k + 1$ ) linear unabhängige Gitterpunkte auf  $Q$ . Dann ist

$$B'_{\Lambda^{n-k}} = \{\underline{a}'_1, \dots, \underline{a}'_{n-k}\} \quad \text{mit} \quad \underline{a}'_1 := \overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \underline{a}'_{n-k} := \overrightarrow{P_1 P_{n-k+1}}$$

eine Basis von  $\Lambda^{n-k}$  und sämtlichen Nebengittern

$$\Lambda_i^{n-k} = \Lambda^{n-k} + (\mu_1 \underline{a}_{n-k+1} + \dots + \mu_k \underline{a}_n); \mu_m \in \mathbb{Z}; m = 1, \dots, k$$

von  $\Lambda^{n-k}$ , in denen obige Translate  $Q'$  liegen können.

Da mindestens  $n - k$  der Gitterpunkte  $P_1, \dots, P_{n-k+1}$  im Innern  $\overset{\circ}{Q}$  liegen, bilden - wie man sich leicht überlegt - die offenen Translate

$$\overset{\circ}{Q}' + (\nu_1 \underline{a}'_1 + \dots + \nu_{n-k} \underline{a}'_{n-k}) = \{\underline{q}' + (\nu_1 \underline{a}'_1 + \dots + \nu_{n-k} \underline{a}'_{n-k}) \mid \underline{q}' \in \overset{\circ}{Q}'\};$$

$$\nu_j \in \mathbb{Z}; j = 1, \dots, n - k$$

eine Überdeckung<sup>4</sup> des kompletten  $(n-k)$ -dimensionalen Unterraums  $U_i^{n-k}$ , in dem  $Q'$  liegt. Dabei wird bei der Translation

$$\underline{q}' \longmapsto \underline{q}' + (\nu_1 \underline{a}'_1 + \dots + \nu_{n-k} \underline{a}'_{n-k})$$

das Nebengitter  $\Lambda_i^{n-k} \subset U_i^{n-k}$  auf sich selbst abgebildet, d.h. die obigen Translate von  $Q'$  enthalten alle ebenso viele Gitterpunkte wie  $Q'$ .

Dann muß aber im Innern von  $Q'$  mindestens ein Gitterpunkt liegen, da ansonsten alle obigen Translate

$$\overset{\circ}{Q}' + (\nu_1 \underline{a}'_1 + \dots + \nu_{n-k} \underline{a}'_{n-k}) \in U_i^{n-k}$$

und somit das komplette Nebengitter  $\Lambda_i^{n-k}$  keine Gitterpunkte enthalten würde. □□□

Damit läßt sich nun die andere Richtung von Satz 3.2 beweisen:

” $\Rightarrow$ ”: Seien  $\mathcal{U}_{\pm 1}$ ,  $\mathcal{V}_{\pm 1}$  und  $\mathcal{W}_{\pm 1}$  jeweils sich gegenüberliegende Quaderseiten des absolut maximalen  $\mathcal{M}^3$ -Quaders  $Q^3$ . Nach Hilfssatz 3.5 sind die 3 folgenden Fälle und die zugehörigen Unterfälle zu betrachten:

**1. Fall:** Auf  $\mathcal{U}_{\pm 1}$  liegen die Seitenmittelpunkte  $\pm U_1 \in \Lambda^3$ .

Alle weiteren Gitterpunkte von  $\Lambda^3$  liegen auf zu  $\overline{U_1}, -\overline{U_1}$  parallelen Gitterpunktgeraden, wobei zwei benachbarte Gitterpunkte  $P_1$  und  $P_2$  auf einer solchen Gerade den Abstand  $|d(P_1, P_2)| = |d(\pm U_1, O)|$  zueinander haben.

---

<sup>4</sup>Vgl. [2], S. 175, Def. 1.

**1.1. Fall:** Auf  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\pm 1}$  liegen die Seitenmittelpunkte  $\pm V_1 \in \Lambda^3$ .

Dann ist die Quaderachse  $\mathcal{W}_0$  nach Satz 2.8 der absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{U_1}^2$  bzw.  $Q_{V_1}^2$  in dem vollständigen 2-dimensionalen Untergitter  $\Lambda_{u,v}^2$  von  $\Lambda^3$  mit der Basis  $B_{\Lambda_{u,v}^2} = \{\underline{u}_1, \underline{v}_1\}$ .

**1.2. Fall:** Auf  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\pm 1}$  liegen jeweils  $\geq 3$  Gitterpunkte  $\pm V_j, j \in \mathbb{N}^*$ , die nicht alle auf einer Gerade liegen.

Da die Gitterpunkte  $\pm V_j$  auf  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}_1$  bzw.  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{-1}$  nicht alle auf einer Gerade liegen können, spannen jeweils zwei ihrer Differenzvektoren ein Nebengitter  $\Lambda_1^2$  bzw.  $\Lambda_{-1}^2$  eines vollständigen 2-dimensionalen Untergitters  $\Lambda^2$  von  $\Lambda^3$  auf.

Sei  $E_0$  die  $\Lambda^2$  enthaltende Ebene und  $E_i, i \in \mathbb{Z}^*$  die Ebenen, in denen die Nebengitter  $\Lambda_i^2$  von  $\Lambda^2$  liegen.

Nach Hilfssatz 3.6 enthält jeder Schnitt von  $\overset{\circ}{Q}^3$  mit einer der Ebenen  $E_i$  mindestens einen Gitterpunkt.  $Q^3$  kann somit nur die Ebenen  $E_{\pm 1}$  und  $E_0$  treffen, und zwar mit den Quaderseiten  $\mathcal{V}_{\pm 1}$  und der zu  $\mathcal{V}_{\pm 1}$  parallelen Quaderachse  $\mathcal{V}_0$ .

Da auch im Innern der Quaderseiten  $\mathcal{W}_{\pm 1}$  Gitterpunkte  $\pm W_k, k \in \mathbb{N}^*$  liegen - und zwar nach Obigem entweder als Seitenmittelpunkte oder jeweils auf einer zu  $\overline{U_1, -U_1}$  parallelen Gerade durch die Seitenmittelpunkte - ist die Quaderachse  $\mathcal{V}_0$  nach Satz 2.8 der absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{U_1}^2$  im vollständigen 2-dimensionalen Untergitter  $\Lambda_{u,w}^2$  von  $\Lambda^3$  mit der Basis  $B_{\Lambda_{u,w}^2} = \{\underline{u}_1, \underline{w}_1\}$ .

**1.3. Fall:** Auf  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\pm 1}$  liegen zwei Gitterpunktpaare  $\pm V_1$  und  $\pm V_2$  auf einer Gerade durch die Seitenmittelpunkte von  $\mathcal{V}_{\pm 1}$ .

Von den Gitterpunkten  $V_1 \pm \overrightarrow{OU_1}$  liegen entweder beide auf dem Rand von  $\mathcal{V}_1$  oder einer im Innern der Quaderseite.

Im ersten Fall läßt sich aus  $V_1, V_2$  und einem der Punkte  $V_1 \pm \overrightarrow{OU_1}$  wie im 1.2. Fall ein Nebengitter  $\Lambda_1^2$  eines vollständigen Untergitters von  $\Lambda^3$  konstruieren. Da  $V_1$  und  $V_2$  innere Punkte von  $\mathcal{V}_1$  sind, gibt es nach Hilfssatz 3.6 in  $Q^3$  wiederum nur die 3 Flächen  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_{-1}$  und  $\mathcal{V}_0$ , auf denen Gitterpunkte aus  $\Lambda^3$  liegen, wobei die Quaderachse  $\mathcal{V}_0$  der absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{U_1}^2$  im Untergitter  $\Lambda_{u,w}^2$  ist.

Im zweiten Fall spannt  $V_2$  entweder mit  $V_1$  und  $V_1 + \overrightarrow{OU_1}$  bzw.  $V_1 - \overrightarrow{OU_1}$  ein Nebengitter auf (vgl. Fall 1.2) oder  $V_2$  ist selbst dieser weitere Gitterpunkt im Innern von  $\mathcal{V}_1$ .

Dann liegen  $V_1$  und  $V_2$  aber auf einer "Achse" von  $\mathcal{V}_1$  und die Quaderachse  $\mathcal{W}_0$  ist der absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{U_1}^2$  im vollständigen 2-dimensionalen Untergitter  $\Lambda_{u,v}^2$  von  $\Lambda^3$  mit der Basis  $B_{\Lambda_{u,v}^2} = \{\underline{u}_1, \underline{v}_1\}$  (vgl. Fall 1.1).

**2. Fall:** Auf  $\mathring{\mathcal{U}}_{\pm 1}$  liegen jeweils  $\geq 3$  Gitterpunktpaare, die nicht alle auf einer Gerade liegen.

In  $Q^3$  gibt es nach Hilfssatz 3.6 wie in Fall 1.2 genau drei Flächen, auf denen Gitterpunkte aus  $\Lambda^3$  liegen:  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_{-1}$  und die Quaderachse  $\mathcal{U}_0$ .

Da die Gitterpunkte auf  $\mathcal{U}_0$  die einzigen Gitterpunkte im Innern der Quaderseiten  $\mathcal{V}_{\pm 1}$  und  $\mathcal{W}_{\pm 1}$  sind, müssen sie nach Hilfssatz 3.5 entweder Seitenmittelpunkte von  $\mathcal{V}_{\pm 1}, \mathcal{W}_{\pm 1}$  sein oder es sind 2 Punkte, die auf einer Geraden durch den Seitenmittelpunkt - nämlich auf einer der Seiten von  $\mathcal{U}_0$  - liegen.

Damit ist  $\mathcal{U}_0$  nach Satz 2.8 bzw. Satz 2.14 aber ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader im vollständigen 2-dimensionalen Untergitter  $\Lambda_{v,w}^2$  von  $\Lambda^3$  mit der Basis  $B_{\Lambda_{v,w}^2} = \{\underline{v}_1, \underline{w}_1\}$ .

**3. Fall:** Auf  $\mathring{\mathcal{U}}_{\pm 1}$  liegen zwei Gitterpunktpaare  $\pm U_1$  und  $\pm U_2$  auf einer Gerade durch die Seitenmittelpunkte von  $\mathcal{U}_1$  bzw.  $\mathcal{U}_{-1}$ .

Die Gitterpunkte erzeugen mit dem Ursprung  $O$  ein vollständiges Untergitter  $\Lambda^2 \subset E_0$  von  $\Lambda^3$ , d.h. alle weiteren Gitterpunkte von  $\Lambda^3$  liegen wieder auf zu  $E_0$  parallelen, äquidistanten Gitterpunktebenen  $E_i$ .

**3.1. Fall:**  $\pm U_1$  und  $\pm U_2$  liegen jeweils auf einer "Achse" von  $\mathcal{U}_{\pm 1}$ .

Sei o.B.d.A.  $\mathcal{V}_0$  die Achse von  $Q^3$ , auf der die Punkte  $\pm U_1, \pm U_2$  und der Ursprung  $O$  liegen. Da  $\pm U_1$  und  $\pm U_2$  Randpunkte von  $Q^3$  und damit auch Randpunkte von  $\mathcal{V}_0$  sind, läßt sich Hilfssatz 3.6 nicht direkt anwenden.

Betrachtet man aber das Translat

$$\mathcal{V}'_0 := \{\underline{v}_0 + \lambda \cdot \underline{m}_{\mathcal{U}_1} \mid \underline{v}_0 \in \mathcal{V}_0\}; \lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < |\underline{m}_{\mathcal{U}_1}|$$

mit  $\underline{m}_{\mathcal{U}_1}$  als Ortsvektor des Seitenmittelpunkts  $M_{\mathcal{U}_1}$  der Quaderseite  $\mathcal{U}_1$ , so sind  $V_1, V_2$  und  $O$  innere Punkte von  $\mathcal{V}'_0$  und Hilfssatz 3.6 läßt sich bezüglich  $\mathcal{V}'_0$  anwenden.

Dann enthält aber auch jeder Schnitt von  $Q^3$  mit einer zu  $\mathcal{V}_0$  parallelen Gitterpunktebene  $E_i$  mindestens einen inneren Gitterpunkt von  $Q^3$ .

In  $Q^3$  gibt es also wie in Fall 1.2 wiederum genau drei Flächen, auf denen Gitterpunkte aus  $\Lambda^3$  liegen, und zwar  $\mathcal{V}_0$  und die dazu parallelen Quaderseiten  $\mathcal{V}_{\pm 1}$ .

Für den Abstand von  $U_1$  und  $U_2$  gilt dann:

$$|d(O, \mathcal{W}_{\pm 1})| \leq |d(U_1, U_2)| < |d(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_{-1})|.$$

Sei nun  $W_1$  ein Gitterpunkt auf  $\mathcal{W}_1$ . Dann liegt einer der beiden Gitterpunkte

$$P = W_1 + \overrightarrow{U_1 U_2} \quad \text{oder} \quad P' = W_1 - \overrightarrow{U_1 U_2}$$

im Innern von  $Q^3$ , muß also der Ursprung  $O$  sein.

Das bedeutet aber wiederum, daß  $\pm W_1$  die Seitenmittelpunkte von  $\mathcal{W}_{\pm 1}$  sind und die Quaderachse  $\mathcal{V}_0$  der absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{U_1}^2$  im vollständigen Untergitter  $\Lambda_{u,w}^2$  von  $\Lambda^3$  mit der Basis  $B_{\Lambda_{u,w}^2} = \{\underline{u}_1, \underline{w}_1\}$  ist.

**3.2. Fall:**  $\pm U_1$  und  $\pm U_2$  liegen nicht auf einer "Achse" von  $\mathcal{U}_{\pm 1}$ .

Die letzte Möglichkeit für die Lage von Gitterpunkten auf  $Q^3$  ist, daß *alle* Quaderseiten nur je 2 Gitterpunkte auf einer Gerade durch ihren Seitenmittelpunkt besitzen, die nicht auf einer "Achse" der Seite liegen.

**Beh.:** Dieser Fall kann nicht eintreten, ohne daß nichttriviale Gitterpunkte im Innern von  $Q^3$  liegen.

**Bew.:** Auf allen sechs Quaderseiten liegen je 2 Gitterpunkte, insgesamt also 12 auf dem Rand von  $Q^3$ .

Teilt man  $Q^3$  durch die drei Quaderachsen in 8 Teilquader  $Q_1^3, \dots, Q_8^3$ , so gibt es darunter mindestens zwei mit  $\geq 2$  Gitterpunkten auf dem Rand, die jeweils im Innern ihrer Seiten liegen.

Seien  $P_1$  und  $P_2$  zwei Gitterpunkte auf dem Rand eines solchen Teilquaders. Dann liegt aber der nichttriviale Gitterpunkt

$$P = O + \overrightarrow{P_1 P_2}$$

im Innern von  $Q^3$ . □

Damit ist gezeigt, daß ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^3$  immer (mindestens) eine Achse besitzt, die ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem vollständigen 2-dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^3$  ist. □□□



**Bemerkung 3.7**

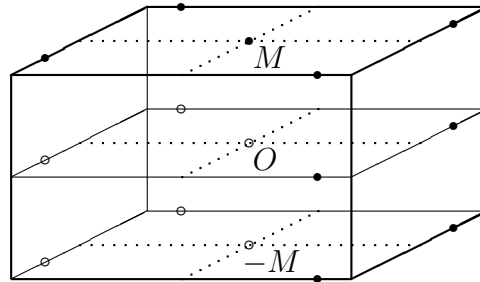
1. Aus dem Satz von Minkowski-Hajós (vgl. [5], Kap. 13 und [6], Kap. 12) folgt analog zu Bemerkung 2.11, daß ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^3$  mindestens ein Seitenpaar besitzt, in dessen Innern genau ein Gitterpunktpaar aus  $\Lambda^3$  liegt.

Der obige Beweis ließe sich also mit  $U_{\pm 1}$  als einziges Gitterpunktpaar im Innern der Quaderseiten  $\mathcal{U}_{\pm 1}$  auf den 1. Fall reduzieren.

2. Aus der Konstruktion absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader folgt die Existenz von (mindestens) einem Seitenmittelpunktpaar aus  $\Lambda^3$  bei einem solchen Quader.

Es existieren allerdings auch maximal ausgedehnte aber nicht absolut maximale  $\mathcal{M}^3$ -Quader mit Seitenmittelpunkten aus  $\Lambda^3$ . Die Existenz solcher Seitenmittelpunkte ist also noch keine hinreichende Bedingung für die Existenz eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^3$ -Quaders, wie dies im 2-Dimensionalen der Fall war (vgl. Satz 2.8).

**Beispiel 3.8** Ein nicht absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader  $\tilde{Q}^3$  im Gitter  $\Lambda^3$



Die beiden Seitenmittelpunkte  $M$  und  $-M$  von  $\tilde{Q}^3$  sind Gitterpunkte des zugrundegelegten Gitters  $\Lambda^3$ .

Da allerdings keine der Achsen von  $\tilde{Q}^3$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem 2-dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^3$  ist, kann  $\tilde{Q}^3$  nicht absolut maximal in  $\Lambda^3$  sein.

## 3.2 Eigenschaften

Wie in Kapitel 2.2 werden auch bei absolut maximalen  $\mathcal{M}^3$ -Quadern Anzahl und Lage von Gitterpunkten auf dem Rand der Quader sowie ihre Seitenverhältnisse untersucht.

### 3.2.1 Randpunkte

Nach Konstruktion schneidet ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader  $Q^3$  im Gitter  $\Lambda^3$  genau die 3 Gitterpunktebenen  $E_0$ ,  $E_1$  und  $E_{-1}$ .

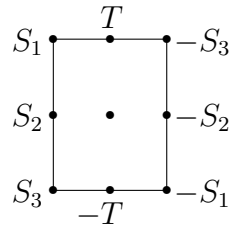
Die Gitterpunkte auf dem Rand von  $Q^3$  liegen dabei auf der Quaderachse  $Q_T^2$  und den beiden zu  $Q_T^2$  parallelen Quaderseiten  $\mathcal{R}_{\pm 1}$  (vgl. Fig. 3.1).

#### Anzahl der Randpunkte absolut maximaler $\mathcal{M}^3$ -Quader

Da  $Q_T^2$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem 2-dimensionalen Untergitter  $\Lambda^2$  von  $\Lambda^3$  ist, besitzt er nach Satz 2.12 genau 3 oder 4 nichttriviale Gitterpunktpaare auf seinem Rand, wobei mindestens ein Gitterpunktpaar ein Seitenmittelpunktpaar ist.

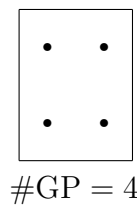
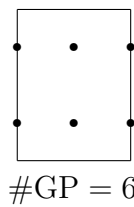
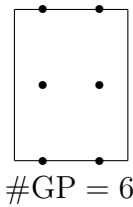
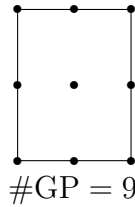
Wegen der analogen Gitterpunktanordnung auf  $Q_T^2$  und den Quaderseiten  $\mathcal{R}_{\pm 1}$  ergeben sich durch Verschieben des Gitters  $\Lambda^2$  die folgenden Möglichkeiten zur Lage von Gitterpunkten auf  $\mathcal{R}_{\pm 1}$ :

**1. Fall:** Auf  $Q_T^2$  liegen 4 nichttriviale Gitterpunktpaare  $\pm T, \pm S_1, \pm S_2, \pm S_3$ .



Nach Korollar 2.13 handelt es sich bei den Gitterpunkten um die 4 Eckpunkte und die 4 Seitenmittelpunkte von  $Q_T^2$ .

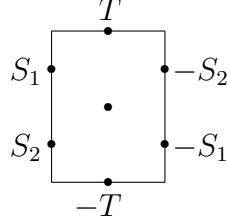
Daraus ergeben sich für  $\mathcal{R}_{\pm 1}$  folgende Möglichkeiten:



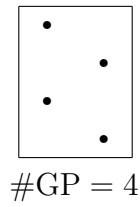
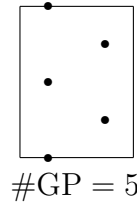
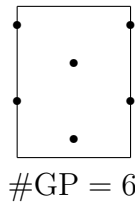
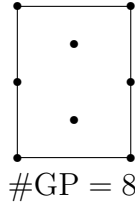
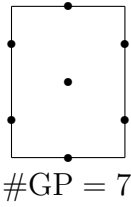
Man erhält also absolut maximale  $\mathcal{M}^3$ -Quader mit 13, 10 oder 8 Gitterpunktpaaren auf dem Rand.

**2. Fall:** Auf  $Q_T^2$  liegen 3 nichttriviale Gitterpunktpaare  $\pm T, \pm S_1$  und  $\pm S_2$ .

**2.1. Fall:**  $|d(S_1, T)| = |d(S_2, -T)|$

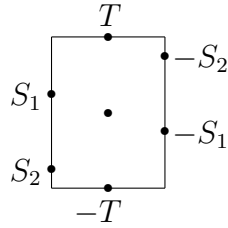


Daraus ergeben sich für  $\mathcal{R}_{\pm 1}$  folgende Möglichkeiten:

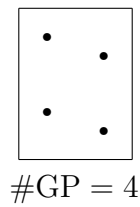
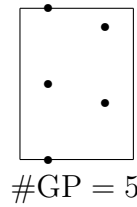
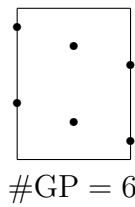
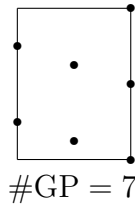
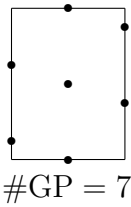


Man erhält in diesem Fall absolut maximale  $\mathcal{M}^3$ -Quader mit 11, 10, 9, 8 oder 7 Gitterpunktpaaren auf dem Rand.

**2.2. Fall:**  $|d(S_1, T)| \neq |d(S_2, -T)|$



Daraus ergeben sich für  $\mathcal{R}_{\pm 1}$  folgende Möglichkeiten:



Man erhält absolut maximale  $\mathcal{M}^3$ -Quader mit 10, 9, 8 oder 7 Gitterpunktpaaren auf dem Rand.

Zusammengefaßt gilt also:

**Satz 3.9**

*Absolut maximale  $\mathcal{M}^3$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^3$  besitzen genau*

*7, 8, 9, 10, 11 oder 13*

*Gitterpunktpaare aus  $\Lambda^3$  auf ihrem Rand.*

**Beweis:**  $\checkmark$

**Bemerkung 3.10**

*Die Umkehrung von Satz 3.9 ist im Gegensatz zum 2-dimensionalen Fall nicht für alle Zahlen  $7, \dots, 13$  möglich.*

*So hat z.B. der  $\mathcal{M}^3$ -Quader aus Beispiel 3.8 insgesamt 7 Gitterpunktpaare auf seinem Rand, ist aber nicht absolut maximal in  $\Lambda^3$ .*

Allerdings läßt sich folgende Aussage beweisen:

**Satz 3.11**

*(Maximal ausgedehnte)  $\mathcal{M}^3$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^3$ , die*

*(8), 9, 10, 11 oder 13*

*Gitterpunktpaare auf ihrem Rand besitzen, sind absolut maximal in  $\Lambda^3$ .*

**Beweis:** Es wird gezeigt, daß nicht absolut maximale  $\mathcal{M}^3$ -Quader  $\leq 8$  und maximal ausgedehnte, nicht absolut maximale  $\mathcal{M}^3$ -Quader  $\leq 7$  Gitterpunktpaare aus  $\Lambda^3$  auf ihrem Rand besitzen:

Sei  $\tilde{Q}^3$  ein  $\mathcal{M}^3$ -Quader in  $\Lambda^3$  mit den Quaderachsen  $\mathcal{U}_0$ ,  $\mathcal{V}_0$  und  $\mathcal{W}_0$ , wobei o.B.d.A.  $\mathcal{U}_0$  eine Achse mit maximaler Anzahl nichttrivialer Gitterpunkte ist. Nach Konstruktion sind diese Gitterpunkte alle Randpunkte von  $\tilde{Q}^3$ .

Liegen also  $\geq 3$  Gitterpunktpaare auf  $\mathcal{U}_0$ , so ist die Quaderachse nach Satz 2.14 ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem vollständigen 2-dimensionalen Untergitter  $\Lambda^2$  von  $\Lambda^3$  und  $\tilde{Q}^3$  damit nach Satz 3.2 absolut maximal in  $\Lambda^3$ .

Die nicht absolut maximalen  $\mathcal{M}^3$ -Quader sind somit nach Satz 2.14 und Satz 3.2 genau die Quader mit  $\leq 2$  nichttrivialen Gitterpunktpaaren auf  $\mathcal{U}_0$  (sowie  $\mathcal{V}_0$  und  $\mathcal{W}_0$ ).

Dabei lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

**1. Fall:** Auf  $\mathcal{U}_0$  liegen *keine* nichttrivialen Gitterpunkte.

Die drei Quaderachsen  $\mathcal{U}_0$ ,  $\mathcal{V}_0$  und  $\mathcal{W}_0$  von  $\tilde{Q}^3$  teilen den Quader in 8 Teilquader  $\tilde{Q}_1^3, \dots, \tilde{Q}_8^3$ .

Die Gesamtzahl der Gitterpunktpaare auf dem Rand von  $\tilde{Q}^3$  ergibt sich dann aus der Summe der nichttrivialen Gitterpunktpaare auf den Achsen  $\mathcal{U}_0$ ,  $\mathcal{V}_0$  und  $\mathcal{W}_0$  und auf den Flächen

$$\partial \tilde{Q}_j^3 \setminus \{\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{W}_0\}; j = 1, \dots, 8.$$

Auf einer solchen Randfläche kann aber jeweils maximal 1 Gitterpunkt aus  $\Lambda^3$  liegen, da für 2 Gitterpunkte  $P_1, P_2 \in \partial \tilde{Q}_j^3 \setminus \{\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{W}_0\}$  der Gitterpunkt

$$P = O + \overrightarrow{P_1 P_2}$$

innerer Punkt von  $\tilde{Q}^3$  wäre.

Da  $\mathcal{U}_0$  eine Quaderachse mit maximaler Anzahl nichttrivialer Gitterpunktpaare ist, ergeben sich also maximal

$$\frac{1}{2}(8 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = 4$$

Gitterpunktpaare auf dem Rand von  $\tilde{Q}^3$ .

**2. Fall:** Auf  $\mathcal{U}_0$  liegt genau 1 nichttriviales Gitterpunktpaar.

Die gleichen Überlegungen wie im 1. Fall ergeben die maximale Anzahl von

$$\frac{1}{2}(8 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = 7$$

Gitterpunktpaaren auf dem Rand von  $\tilde{Q}^3$ .

**3. Fall:** Auf  $\mathcal{U}_0$  liegen genau 2 nichttriviale Gitterpunktpaare.

Da nicht alle dieser nichttrivialen Gitterpunkte auf der gleichen Ursprungsgerade liegen können, erzeugen zwei von ihnen mit dem Ursprung  $O$  ein vollständiges 2-dimensionales Untergitter  $\Lambda^2$  von  $\Lambda^3$ , d.h.  $\Lambda^3$  baut sich komplett aus  $\Lambda^2$  und seinen Nebengittern  $\Lambda_{\pm k}^2$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  auf.

Des weiteren bilden diese 4 Gitterpunkte ein ebenes Gitterpolygon mit *einem* inneren Gitterpunkt, dem Ursprung  $O$ . Mit der Pickschen Identität<sup>5</sup> ergibt sich damit für den Flächeninhalt von  $\mathcal{U}_0$ :

$$(3.12) \quad V(\mathcal{U}_0) \geq \left(\frac{1}{2} \cdot 4 + 1 - 1\right) \cdot d(\Lambda^2) = 2 \cdot d(\Lambda^2).$$

---

<sup>5</sup>Vgl. [7], S. 311-319.

Trifft  $\tilde{Q}^3$  nun  $j$  Nebengitterpaare  $\Lambda_{\pm k}^2$ ,  $k = 1, \dots, j$ , so läßt sich sein Flächeninhalt mit (3.12) durch

$$V(\tilde{Q}^3) \geq 4j \cdot d(\Lambda^3)$$

abschätzen. Da  $\tilde{Q}^3$  aber nach Voraussetzung nicht absolut maximal ist und daher

$$V(\tilde{Q}^3) < 8 \cdot d(\Lambda^3)$$

gilt, kann der Quader maximal die beiden zu  $\Lambda^2$  benachbarten Nebengitter  $\Lambda_{\pm 1}^2$  treffen.<sup>6</sup> Dabei ist allerdings nicht klar, ob  $\tilde{Q}^3$  die Gitterpunktebenen, auf denen die Gitter  $\Lambda_{\pm 1}^2$  liegen, nur mit den zu  $\mathcal{U}_0$  parallelen Quaderseiten  $\mathcal{U}_{\pm 1}$  berührt oder sie "durchdringt".

Eine genauere Aussage dazu erhält man mit Hilfssatz 3.6. Da allerdings der Ursprung  $O$  der einzige innere Gitterpunkt von  $\mathcal{U}_0$  ist, läßt sich dieser Satz nicht direkt auf Translate von  $\mathcal{U}_0$  anwenden. Es gilt aber dennoch:

**Beh.:** Ist ein Gitterpunkt auf  $\partial\mathcal{U}_0$  kein Eckpunkt von  $\mathcal{U}_0$ , so trifft  $\tilde{Q}^3$  neben  $\Lambda^2$  höchstens noch die zu  $\Lambda^2$  benachbarten Nebengitter  $\Lambda_{\pm 1}^2$ , und zwar mit den zu  $\mathcal{U}_0$  parallelen Quaderseiten  $\mathcal{U}_{\pm 1}$ .

**Bew.:** Sei  $P$  ein nichttrivialer Gitterpunkt von  $\mathcal{U}_0$  im Innern der Seite  $u_P$ . Dann liegen im Innern des Translats

$$\mathcal{U}'_0 := \{\underline{u}_0 + \lambda \cdot \underline{m}_{u_P} \mid \underline{u}_0 \in \mathcal{U}_0\}; \quad \lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < |\underline{m}_{u_P}|$$

von  $\mathcal{U}_0$  mit  $\underline{m}_{u_P}$  als Ortsvektor des Seitenmittelpunkts von  $u_P$  die beiden Gitterpunkte  $P$  und  $O$  (vgl. Bew. von Satz 3.2, 3.1. Fall).

Liegt nun im Innern von  $u_P$  noch ein weiterer Gitterpunkt (vgl. Fig. 3.13), dann ist auch dieser ein innerer Punkt von  $\mathcal{U}'_0$ . Andererseits liegen aber auf den zu  $u_P$  senkrechten Seiten von  $\mathcal{U}_0$  zwei weitere Gitterpunkte (vgl. Fig. 3.16), von denen mindestens einer wegen  $\lambda < |\underline{m}_{u_P}|$  auch auf dem Rand von  $\mathcal{U}'_0$  liegt.

In beiden Fällen läßt sich Hilfssatz 3.6 auf  $\mathcal{U}'_0$  anwenden, d.h. in jedem Translat von  $\mathcal{U}'_0$  in eine zu  $\mathcal{U}_0$  parallele Gitterpunktebene  $E_i$  mit  $\Lambda_i^2 \in E_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  - und somit auch in jedem Schnitt von  $\tilde{Q}^3$  mit einer solchen Ebene - liegt mindestens ein innerer Gitterpunkt.

Dann kann  $\tilde{Q}^3$  aber höchstens noch die beiden Nebengitter  $\Lambda_{\pm 1}^2$  mit den Quaderseiten  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_{-1}$  treffen.  $\square$

---

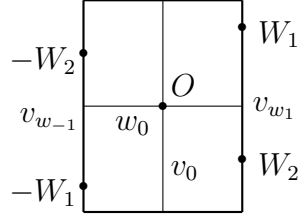
<sup>6</sup>Trifft  $\tilde{Q}^3$  nicht  $\Lambda_{\pm 1}^2$ , so sind die beiden Gitterpunktpaare auf  $\mathcal{U}_0$  die einzigen Gitterpunkte auf dem Quader und die Aussage des Satzes ist erfüllt.

Im folgenden wird daher davon ausgegangen, daß  $\tilde{Q}^3$  die Nebengitter  $\Lambda_{\pm 1}^2$  tatsächlich trifft.

Für die Anordnung der Gitterpunkte auf  $\mathcal{U}_0$  gibt es nun zwei Möglichkeiten:

**3.1. Fall:** Die nichttrivialen Gitterpunktpaare liegen auf zwei sich gegenüberliegenden Seiten von  $\mathcal{U}_0$ .

**Figur 3.13**



Seien  $\pm W_1, \pm W_2 \in \mathcal{W}_{\pm 1}$  die Gitterpunkte auf den Seiten  $v_{w_{\pm 1}}$  und  $v_0$  die zu  $v_{w_{\pm 1}}$  parallele bzw.  $w_0$  die zu  $v_{w_{\pm 1}}$  senkrechte Achse von  $\mathcal{U}_0$  (s. Fig. 3.13). Sämtliche Gitterpunkte von  $\Lambda^2$  liegen dann auf zu  $v_{w_{\pm 1}}$  parallelen Gitterpunktgeraden  $g_i$ , wobei zwei benachbarte Geraden  $g_i$  und  $g_{i+1}$  den Abstand

$$(3.14) \quad |d(g_i, g_{i+1})| = |d(v_0, v_{w_{\pm 1}})| = \frac{1}{2}|w_0|$$

zueinander haben. Der Abstand von zwei benachbarten Gitterpunkten  $P_j$  und  $P_{j+1}$  auf einer solchen Gerade  $g_i$  ist

$$(3.15) \quad |v_0| \geq |d(P_j, P_{j+1})| = |d(W_1, W_2)| > \frac{1}{2}|v_0|.$$

Wegen der analogen Gitterpunktanordnung auf allen Nebengittern  $\Lambda_k^2$  können die zu  $\mathcal{U}_0$  parallelen Quaderseiten  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_{-1}$  nach (3.14) jeweils maximal 3 solcher Gitterpunktgeraden  $g_{i,\pm 1}$  mit Gitterpunkten aus  $\Lambda_{\pm 1}^2$  schneiden, wobei nach (3.15) jeweils maximal 2 Gitterpunkte einer solchen Gerade auf  $\mathcal{U}_{\pm 1}$  liegen.

Insgesamt ergeben sich in diesem Fall also maximal

$$\frac{1}{2}(6 \cdot 2 + 4) = 8$$

Gitterpunktpaare auf dem Rand von  $\tilde{Q}^3$ , wobei der Quader nicht maximal ausgedehnt sein kann, da im Innern der Quaderseiten  $\mathcal{V}_{\pm 1}$  keine Gitterpunkte liegen.

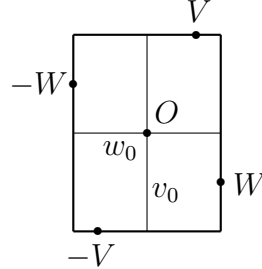
Würde man  $\tilde{Q}^3$  entlang  $v_0$  weiter ausdehnen, so wären die nächsten Gitterpunkte, auf die man trifft, die Punkte

$$\pm V' := O \pm \overrightarrow{W_1 W_2}.$$

$\mathcal{U}'_0$  wäre in dem Fall also ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader im Gitter  $\Lambda^2$  und  $\tilde{Q}^3$  absolut maximal in  $\Lambda^3$ .

**3.2. Fall:** Im Innern jeder Seite von  $\mathcal{U}_0$  liegt ein nichttrivialer Gitterpunkt.

**Figur 3.16**



Auf dem Rand jedes der 4 Teilrechtecke, in die  $\mathcal{U}_0$  durch seine Achsen  $v_0$  und  $w_0$  aufgeteilt wird, liegt jeweils genau einer der vier Gitterpunkte  $\pm V$  und  $\pm W$ , da ansonsten nichttriviale Gitterpunkte im Innern von  $\mathcal{U}_0$  liegen würden (vgl. Beweis zu Satz 2.27, 2.2.2. Fall).

Des weiteren sind  $\pm V$  und  $\pm W$  keine Seitenmittelpunkte von  $\mathcal{U}_0$ , da andernfalls 3 bzw. 4 Gitterpunktpaare auf  $\mathcal{U}_0$  liegen würden und  $\mathcal{U}_0$  absolut maximal in  $\Lambda^2$  wäre.

**Beh.:** Im Innern von  $\mathcal{U}_{\pm 1}$  liegt jeweils (mindestens) ein Gitterpunkt aus  $\Lambda^3$ , der entweder Seitenmittelpunkt von  $\mathcal{U}_{\pm 1}$  ist oder nicht auf einer der "Achsen" der Quaderseiten liegt.

**Bew.:** Da in diesem Fall nach dem obigen Beweis jeder Schnitt von  $\tilde{Q}^3$  mit einer der Gitterpunktebenen  $E_i$  mit  $\Lambda_i^2 \in E_i$  einen inneren Gitterpunkt enthält, besitzt auch  $\mathcal{U}_1$  (mindestens) einen inneren Gitterpunkt  $U_1$ .

$U_1$  ist also entweder selbst der gesuchte Gitterpunkt oder er liegt auf einer "Achse" von  $\mathcal{U}_1$  ohne deren Mittelpunkt zu sein. Im zweiten Fall ist aber auch einer der Gitterpunkte

$$U_1 \pm \overrightarrow{OV} \quad \text{bzw.} \quad U_1 \pm \overrightarrow{OW}$$

innerer Punkt von  $\mathcal{U}_1$  und liegt, da die Seitenmittelpunkte von  $\mathcal{U}_0$  keine Gitterpunkte sind, auf keiner "Achse" von  $\mathcal{U}_1$ . Für  $\mathcal{U}_{-1}$  folgt die Behauptung entsprechend.  $\square$

Besitzt nun  $\mathcal{U}_1$  und damit auch  $\mathcal{U}_{-1}$  einen Seitenmittelpunkt aus  $\Lambda^3$ , so ist die Anordnung ihrer Gitterpunkte identisch mit der Gitterpunktanordnung auf  $\mathcal{U}_0$ .

Es liegen in diesem Fall also insgesamt

$$\frac{1}{2}(5 \cdot 2 + 4) = 7$$

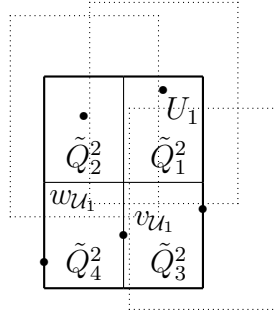
Gitterpunktpaare auf dem Rand von  $\tilde{Q}^3$ .



**Beh.:** Besitzen  $\mathcal{U}_{\pm 1}$  keine Seitenmittelpunkte aus  $\Lambda^3$ , so können auch in diesem Fall jeweils maximal 5 Gitterpunkte auf diesen Quaderseiten liegen.

**Bew.:** Teilt man  $\mathcal{U}_1$  durch seine "Achsen"  $v_{\mathcal{U}_1}$  und  $w_{\mathcal{U}_1}$  in die vier Teilrechtecke  $\tilde{Q}_1^2, \dots, \tilde{Q}_4^2$  (s. Fig. 3.17), so liegt nach dem obigen Beweis (mindestens) ein Gitterpunkt im Innern eines dieser Rechtecke. Dies sei o.B.d.A.  $U_1 \in \tilde{Q}_1^2$ .

**Figur 3.17**  $\mathcal{U}_1$  mit dem inneren Gitterpunkt  $U_1 \in \tilde{Q}_1^2$



Da man symmetrisch um jeden Gitterpunkt auf  $\mathcal{U}_1$  ein zu  $\mathcal{U}_0$  bezüglich der Gitterpunktverteilung identisches Rechteck legen kann, das demnach keine weiteren Gitterpunkte außer dem Mittelpunkt selbst enthält, gilt:

- $U_1$  ist der einzige Gitterpunkt auf dem Abschluß von  $\tilde{Q}_1^2$ .
- Auf den beiden zu  $\tilde{Q}_1^2$  benachbarten, halboffenen Teilrechtecken  $\tilde{Q}_2^2$  und  $\tilde{Q}_3^2$  - wobei jeweils die "Achsen"  $v_{\mathcal{U}_1}$  und  $w_{\mathcal{U}_1}$  von  $\mathcal{U}_1$  ausgenommen werden - liegt maximal ein weiterer Gitterpunkt pro Teilrechteck.
- Auf dem letzten abgeschlossenen Teilrechteck  $\tilde{Q}_4^2$  liegen maximal 2 Gitterpunkte, da von  $\geq 3$  Gitterpunkten zwei Endpunkte der selben Seite von  $\tilde{Q}_4^2$  wären und  $\mathcal{U}_0$  somit Seitenmittelpunkte aus  $\Lambda^3$  besitzen würde.

Damit erhält man maximal 5 Gitterpunkte auf der Quaderseite  $\mathcal{U}_1$  und entsprechend maximal 5 Gitterpunkte auf  $\mathcal{U}_{-1}$ .  $\square$

Insgesamt ergeben sich also auch in diesem Fall maximal

$$\frac{1}{2}(5 \cdot 2 + 4) = 7$$

Gitterpunktpaare auf dem Rand von  $\tilde{Q}^3$ .

Damit ist gezeigt, daß (maximal ausgedehnte) nicht absolut maximale  $\mathcal{M}^3$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^3$  höchstens 7 bzw. 8 Gitterpunktpaare auf ihrem Rand besitzen und daher alle (maximal ausgedehnten)  $\mathcal{M}^3$ -Quader mit mehr als 7 bzw. 8 Gitterrandpunktpaaren absolut maximal in  $\Lambda^3$  sind.  $\square\square\square$

Aus dem obigen Beweis und dem Beweis von Satz 3.9 ergeben sich schließlich noch folgende Aussagen:

**Korollar 3.18**

1. Ein  $\mathcal{M}^3$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^3$  besitzt höchstens 13 Gitterpunktpaare aus  $\Lambda^3$  auf seinem Rand.
2. Liegen 13 Gitterpunktpaare eines Gitters  $\Lambda^3$  auf dem Rand eines  $\mathcal{M}^3$ -Quaders, so gilt:
  - i) Der Quader ist absolut maximal in  $\Lambda^3$ .
  - ii) Bei den Gitterpunkten handelt es sich um die 6 Seitenmittelpunkte, 8 Eckpunkte und die 12 Kantenmittelpunkte des Quaders.
  - iii)  $\Lambda^3$  läßt sich durch eine Orthogonalbasis aufspannen.

**Beweis:**

1. Die Aussage folgt direkt aus Satz 3.9 und dem Beweis von Satz 3.11 bzw. aus [1], S. 79.  $\square$
2. i) Folgt aus Satz 3.11.  
 ii) Folgt aus dem Beweis von Satz 3.9, 1. Fall.  
 iii)  $\Lambda^3$  läßt sich z.B. durch die orthogonalen Ortsvektoren der 3 Seitenmittelpunkte  $M_{R_1}, M_{S_1}$  und  $M_{T_1}$  - die nach 2. ii) tatsächlich Gitterpunkte sind - aufspannen.  $\square\square\square$

**Lage der Randpunkte absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader**

Analog zum 2-dimensionalen Fall lassen sich die Koordinaten der Gitterpunkte  $\pm R_j$  eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^3$ -Quaders  $Q^3$  in einem Gitter  $\Lambda^3$  in Abhängigkeit der Koordinaten der Gitterpunkte  $\pm S_i$  und  $\pm T$  berechnen. Dabei gilt analog zu Satz 2.15:

$$\begin{aligned}
 \left| \det \begin{pmatrix} x_{r_j,1} & x_{s_i,1} & x_{t,1} \\ x_{r_j,2} & x_{s_i,2} & x_{t,2} \\ x_{r_j,3} & x_{s_i,3} & x_{t,3} \end{pmatrix} \right| &= |x_{r_j,1}(x_{s_i,2}x_{t,3} - x_{s_i,3}x_{t,2}) + x_{r_j,2}(x_{s_i,3}x_{t,1} - x_{s_i,1}x_{t,3}) \\
 &\quad + x_{r_j,3}(x_{s_i,1}x_{t,2} - x_{s_i,2}x_{t,1})| \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Allerdings ist die in Kapitel 2.2.1 verwendete Methode zur Eingrenzung der durch Satz 2.15 vorgegebenen Gitterpunkte auf die tatsächlichen Gitterpunkte des Quaders über das Skalarprodukt im 3-dimensionalen Fall sehr aufwendig und wird hier nicht ausgeführt.

### 3.2.2 Seitenverhältnisse

Nach Satz 2.18 gilt für das Seitenverhältnis absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader mit den Quaderachsen  $s_0$  und  $t_0$ :

$$|s_0| : |t_0| = d(\Lambda^2) : |d(T, O)|^2.$$

Im 3-dimensionalen Fall soll analog dazu nicht das Flächeninhaltsverhältnis der Quaderseiten  $\mathcal{R}_{\pm 1}$ ,  $\mathcal{S}_{\pm 1}$  und  $\mathcal{T}_{\pm 1}$ , sondern das Längenverhältnis der Achsen  $r_0$ ,  $s_0$  und  $t_0$  betrachtet werden (vgl. Fig. 3.1).

#### Satz 3.19

*Sei  $Q^3$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader im Gitter  $\Lambda^3$  mit der Basis  $B_{\Lambda^3} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$  und der Gitterdeterminante  $d(\Lambda^3)$ .*

*Des weiteren sei die Quaderachse  $Q_T^2$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader im vollständigen Untergitter  $\Lambda^2$  von  $\Lambda^3$  mit der Basis*

$$B_{\Lambda^2} = \{\underline{t}, \underline{s}\} = \{x_{t,1}\underline{a}_1 + x_{t,2}\underline{a}_2 + x_{t,3}\underline{a}_3, x_{s,1}\underline{a}_1 + x_{s,2}\underline{a}_2 + x_{s,3}\underline{a}_3\}$$

*und der Gitterdeterminante  $d(\Lambda^2)$ .*

*Dann gilt: Das Verhältnis der Achsen  $r_0$ ,  $s_0$  und  $t_0$  ist von der Form*

$$|r_0| : |s_0| : |t_0| = \frac{d(\Lambda^3)}{d(\Lambda^2)} \cdot |d(T, O)| : d(\Lambda^2) : |d(T, O)|^2.$$

#### Beweis:

In  $\Lambda^2$  gilt:  $|s_0| \cdot |t_0| = 4 \cdot d(\Lambda^2) \Rightarrow |s_0| = 4 \cdot \frac{d(\Lambda^2)}{|t_0|}.$

In  $\Lambda^3$  gilt:  $|r_0| \cdot |s_0| \cdot |t_0| = 8 \cdot d(\Lambda^3) \Rightarrow |r_0| = 8 \cdot \frac{d(\Lambda^3)}{|s_0| \cdot |t_0|} = 2 \cdot \frac{d(\Lambda^3)}{d(\Lambda^2)}.$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |r_0| : |s_0| : |t_0| &= 2 \cdot \frac{d(\Lambda^3)}{d(\Lambda^2)} : 4 \cdot \frac{d(\Lambda^2)}{|t_0|} : |t_0| \\ &= 2 \cdot \frac{d(\Lambda^3)}{d(\Lambda^2)} \cdot |t_0| : 4 \cdot d(\Lambda^2) : |t_0|^2. \end{aligned}$$

Mit

$$|t_0| = 2 \cdot |d(T, O)|$$

erhält man schließlich

$$|r_0| : |s_0| : |t_0| = \frac{d(\Lambda^3)}{d(\Lambda^2)} \cdot |d(T, O)| : d(\Lambda^2) : |d(T, O)|^2. \quad \square \square \square$$

**Bemerkung 3.20**

Im Gegensatz zum 2-dimensionalen Fall (vgl. Kor. 2.24) besitzen absolut maximale  $\mathcal{M}^3$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^3$  mit der Basis

$$B_{\Lambda^3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit } a_{ij} \in \mathbb{Z}; i, j = 1, \dots, 3$$

nicht unbedingt "Seitenverhältnisse" der Form  $k : l : m$  mit  $k, l, m \in \mathbb{N}^*$ , da der Ausdruck

$$\frac{d(\Lambda^3)}{d(\Lambda^2)} \cdot |d(T, O)|$$

im allgemeinen keine natürliche Zahl ist.

**Beispiel 3.21**

Sei  $Q_{(3,2,0)}^3$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader im Gitter  $\mathbb{Z}^3$  und der absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_{(3,2,0)}^2$  mit den Gitterpunkten

$$\pm T(\pm 3, \pm 2, 0)_{B_{\mathbb{Z}^3}}, \pm S_1(\pm 1, \pm 1, 0)_{B_{\mathbb{Z}^3}} \text{ und } \pm S_2(\mp 2, \mp 1, 0)_{B_{\mathbb{Z}^3}}$$

eine Achse von  $Q_{(3,2,0)}^3$  im Untergitter  $\mathbb{Z}^2$  von  $\mathbb{Z}^3$ .

Wegen

$$d(\mathbb{Z}^3) = d(\mathbb{Z}^2) = 1$$

und

$$|d(T, O)| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

gilt für das Verhältnis der Quaderachsen  $r_0$ ,  $s_0$  und  $t_0$ :

$$|r_0| : |s_0| : |t_0| \stackrel{3.19}{=} \sqrt{13} : 1 : 13.$$

Analog zu Korollar 2.20 läßt sich das Seitenverhältnis absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader mit  $|d(T, O)| = d(\Lambda^1)$  als Gitterdeterminante des vollständigen 1-dimensionalen Untergitters  $\Lambda^1$  von  $\Lambda^2$  bzw.  $\Lambda^3$  mit der Basis  $B_{\Lambda^1} = \{\underline{t}\}$  auch folgendermaßen darstellen (vgl. Satz 3.25):

**Korollar 3.22**

Das Verhältnis der Achsen  $r_0$ ,  $s_0$  und  $t_0$  eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^3$ -Quaders  $Q_T^3$  in einem Gitter  $\Lambda^3$  ist von der Form

$$|r_0| : |s_0| : |t_0| = \frac{d(\Lambda^3)}{d(\Lambda^2)} : \frac{d(\Lambda^2)}{d(\Lambda^1)} : d(\Lambda^1)$$

mit  $\Lambda^1$  und  $\Lambda^2$  als vollständige 1- bzw. 2-dimensionale Untergitter von  $\Lambda^3$ .

**Beweis:**  $\sqrt{\quad}$

### 3.3 Ausblick: Absolut maximale $\mathcal{M}^n$ -Quader

Die Ergebnisse aus den Kapiteln 2 und 3 weisen sehr oft gemeinsame Strukturen auf, die sich mit anderen als den in dieser Arbeit benutzten Methoden ggf. verallgemeinern lassen.

Daher werden in diesem Abschnitt vermutete Ergebnisse für absolut maximale  $\mathcal{M}^n$ -Quader - ohne Beweise - dargestellt.

#### Konstruktion absolut maximaler $\mathcal{M}^n$ -Quader

Die charakterisierende Eigenschaft absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^3$  ist nach Satz 3.2 die Existenz (mindestens) einer Quaderachse, die selbst ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in einem vollständigen 2-dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^3$  ist.

Interpretiert man in Satz 2.8 die Quaderachse  $t_0$  eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders  $Q_T^2$  als absolut maximalen  $\mathcal{M}^1$ -Quader in einem vollständigen 1-dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^2$ , so läßt sich diese Eigenschaft auch auf absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ -Quader übertragen (vgl. Kor. 2.10).

Es ist daher anzunehmen, daß generell die Existenz eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^{n-1}$ -Quaders als Achse eines  $\mathcal{M}^n$ -Quaders  $Q^n$  eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß  $Q^n$  absolut maximal bezüglich des zugrundegelegten Gitters  $\Lambda^n$  ist:

#### Vermutung 3.23

*Ein  $\mathcal{M}^n$ -Quader  $Q^n$  in einem Gitter  $\Lambda^n$  besitzt genau dann das - nach dem Satz von Minkowski maximale - Volumen*

$$V_{\max}(Q^n) = 2^n \cdot d(\Lambda^n),$$

*wenn eine der Achsen des Quaders ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^{n-1}$ -Quader in einem vollständigen  $(n-1)$ -dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^n$  ist.*

Eine Richtung des Beweises von Vermutung 3.23 ist trivial. So läßt sich analog zum 1. Teil des Beweises von Satz 3.2 immer zeigen, daß ein absolut maximaler  $\mathcal{M}^{n-1}$ -Quader in einem vollständigen  $(n-1)$ -dimensionalen Untergitter  $\Lambda^{n-1}$  von  $\Lambda^n$  auf einer Gitterpunkthyperebene  $H_0$  durch senkrechte Projektion auf die beiden zu  $H_0$  benachbarten Gitterpunkthyperebenen  $H_{\pm 1}$  zu einem absolut maximalen  $\mathcal{M}^n$ -Quader in  $\Lambda^n$  erweitert werden kann.

Mit den in dieser Arbeit benutzten Mitteln ist es allerdings nicht möglich zu zeigen, daß auch jeder absolut maximale  $\mathcal{M}^n$ -Quader mindestens einen solchen absolut maximalen  $\mathcal{M}^{n-1}$ -Quader als Achse besitzt.

**Anzahl der Randpunkte absolut maximaler  $\mathcal{M}^n$ -Quader**

Nach [2], S. 79, Th. 6. und [1], S. 79 gilt für die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand eines (extremalen) Minkowski-Körpers  $K$ , zu denen auch absolut maximale  $\mathcal{M}^n$ -Quader gehören:

$$2 \cdot (2^n - 1) \leq \#GP(K) \leq 3^n - 1.$$

Für absolut maximale  $\mathcal{M}^n$ -Quader mit  $n = 1, 2, 3$  werden beide Schranken tatsächlich angenommen (vgl. Satz 2.12, Satz 3.9 und die Herleitung zu Korollar 2.10). Es stellt sich die Frage, ob das für absolut maximale  $\mathcal{M}^n$ -Quader mit  $n \geq 4$  auch so ist. Dabei gilt:

Die *maximale* Anzahl von nichttrivialen Gitterpunkten auf dem Rand eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^1$ -Quaders läßt sich durch  $3 - 1 = 2$  darstellen, wobei 3 die Gesamtzahl der Gitterpunkte auf dem Quader ist und der Ursprung abgezogen wird.

Im 2-Dimensionalen kommt durch die senkrechte Projektion des 1-dimensionalen Quaders maximal noch zwei mal die gleiche Anzahl von Gitterpunkten hinzu, wobei der Ursprung insgesamt nur ein mal abgezogen wird. Es ergeben sich also maximal  $3^2 - 1 = 8$  nichttriviale Gitterpunkte.

Im 3-Dimensionalen würden sich durch weitere Projektion schließlich maximal  $3^3 - 1 = 26$  Randpunkte ergeben. Insgesamt könnten auf dem Rand eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^n$ -Quaders mit maximaler Anzahl von Gitterpunkten also tatsächlich immer  $3^n - 1$  Gitterpunkte liegen.

Die *minimale* Anzahl der nichttrivialen Gitterpunkte auf dem Rand eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^1$ -Quaders läßt sich durch  $2^1 = 2$  darstellen.

Zur minimalen "Bestückung" eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders mit Gitterpunkten benötigt man dann zusätzlich  $2 \cdot 2 = 2^2$  Gitterpunkte, insgesamt also  $2^1 + 2^2 = 6$  Gitterpunkte.

Im 3-Dimensionalen kommen wiederum  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$  Gitterpunkte hinzu, insgesamt sind es also mindestens  $2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$  Gitterpunkte. Allgemein würden sich damit auf dem Rand eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^n$ -Quaders mindestens  $\sum_{i=1}^n 2^i = 2^{n+1} - 2 = 2 \cdot (2^n - 1)$  Gitterpunkte ergeben.

Damit folgt:

**Vermutung 3.24**

*Für die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand absolut maximaler  $\mathcal{M}^n$ -Quader  $Q^n$  in einem Gitter  $\Lambda^n$  gilt:*

$$2 \cdot (2^n - 1) \leq \#GP(Q^n) \leq 3^n - 1,$$

*wobei sowohl die obere als auch die untere Schranke tatsächlich angenommen werden.*

**Seitenverhältnisse absolut maximaler  $\mathcal{M}^n$ -Quader**

In Kapitel 3.2.2 wurde bei der Berechnung der Seitenverhältnisse absolut maximaler  $\mathcal{M}^3$ -Quader nicht das Verhältnis der Quaderseiten  $\mathcal{R}_{\pm 1}, \mathcal{S}_{\pm 1}$  und  $\mathcal{T}_{\pm 1}$ , sondern das Verhältnis der Achsen  $r_0, s_0$  und  $t_0$  betrachtet, da diese den Abstand der Quaderseiten zum Ursprung beschreiben (vgl. Fig. 3.1).

Dabei hängen diese "Seitenverhältnisse" nur von den Gitterdeterminanten von  $\Lambda^3$  und  $\Lambda^2$  und dem Abstand  $d(T, O)$  bzw. der Gitterdeterminante von  $\Lambda^1$  ab. Es gilt nach Satz 3.19 bzw. Korollar 3.22:

$$|r_0| : |s_0| : |t_0| = \frac{d(\Lambda^3)}{d(\Lambda^2)} \cdot d(\Lambda^1) : d(\Lambda^2) : d(\Lambda^1)^2 = \frac{d(\Lambda^3)}{d(\Lambda^2)} : \frac{d(\Lambda^2)}{d(\Lambda^1)} : d(\Lambda^1).$$

Im 2-Dimensionalen hängt das Seitenverhältnis  $|s_0| : |t_0|$  nach Satz 2.18 und Korollar 2.20 auch nur von den Gitterdeterminanten  $d(\Lambda^2)$  und  $d(\Lambda^1)$  ab:

$$|s_0| : |t_0| = d(\Lambda^2) : d(\Lambda^1)^2 = \frac{d(\Lambda^2)}{d(\Lambda^1)} : d(\Lambda^1)$$

Dabei ergibt der Quotient der Determinanten eines  $k$ -dimensionalen Gitters  $\Lambda^k$  und seines vollständigen  $(k-1)$ -dimensionalen Untergitters  $\Lambda^{k-1}$  gerade den Abstand von zwei benachbarten Gitterpunkthyperebenen von  $\Lambda^k$ , was der geometrischen Interpretation dieser "Seitenverhältnisse" entspricht (vgl. Bem. 2.1 und Kap. 3.1).

Sollte Vermutung 3.23 über die Konstruktion absolut maximaler  $\mathcal{M}^n$ -Quader zutreffen, so läßt sich der obige Beweis für den 2- und 3-dimensionalen Fall auch verallgemeinern:

**Satz 3.25**

*Das Verhältnis der Abstände sich gegenüberliegender Quaderseiten absolut maximaler  $n$ -dimensionaler  $\mathcal{M}^n$ -Quader  $Q^n$  in einem Gitter  $\Lambda^n$  ist von der Form*

$$\frac{d(\Lambda^n)}{d(\Lambda^{n-1})} : \frac{d(\Lambda^{n-1})}{d(\Lambda^{n-2})} : \cdots : \frac{d(\Lambda^2)}{d(\Lambda^1)} : d(\Lambda^1),$$

*wobei die  $\Lambda^k, 1 \leq k \leq n-1$  die entsprechenden vollständigen  $k$ -dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^n$  sind, in denen die absolut maximalen  $\mathcal{M}^k$ -Quader liegen, aus denen sich der  $\mathcal{M}^n$ -Quader  $Q^n$  nach Vermutung 3.23 aufbaut.*

**Beweis:**  $\checkmark$

# Kapitel 4

## Absolut maximale $\mathcal{M}_m^2$ -Quader

Wurden in Kapitel 2 nullpunktsymmetrische 2-dimensionale Quader betrachtet, die *keine* nichttrivialen Gitterpunkte eines Gitters  $\Lambda^2$  in ihrem Innern enthalten, so soll nun eine gewisse Anzahl  $m \in \mathbb{N}^*$  nichttrivialer Gitterpunktpaare aus  $\Lambda^2$  im Innern dieser Quader zugelassen werden.<sup>1</sup>

Dabei sind - in Abhängigkeit der Anzahl innerer Gitterpunkte - folgende Fragen bezüglich dieser sogenannten  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader (vgl. Def. 1.11) von Interesse:

- Wie groß ist der maximale Flächeninhalt  $V_{\max}(Q_m^2)$ , den ein  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader  $Q_m^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$  annehmen kann?
- Wie sind die inneren Gitterpunkte von  $Q_m^2$  in dem Fall, daß der maximale Flächeninhalt  $V_{\max}(Q_m^2)$  angenommen wird, angeordnet?

Eine Aussage zum maximalen Flächeninhalt macht der verallgemeinerte Satz von Minkowski (vgl. [2], S.44, Th. 1. und [6], Kap. 6, Satz 6.2):

### Satz 4.1

*Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein nullpunktsymmetrischer konvexer Körper,  $\Lambda^n \subset \mathbb{R}^n$  ein Gitter und gilt für eine Zahl  $m \in \mathbb{N}$*

$$V(K) > 2^n \cdot m \cdot d(\Lambda^n)$$

*oder*

$$V(K) \geq 2^n \cdot m \cdot d(\Lambda^n) \wedge K = \overline{K},$$

*dann enthält  $K$  mindestens  $m$  verschiedene nichttriviale Gitterpunktpaare*

$$O \neq \pm U_j \in K \cap \Lambda^n; j = 1, \dots, m.$$

---

<sup>1</sup>Die in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse gelten in den meisten Fällen auch für  $m = 0$  und entsprechen den Ergebnissen aus Kapitel 2.



Aus dem Satz folgt:

**Korollar 4.2**

*Liegen  $m \in \mathbb{N}$  verschiedene nichttriviale Gitterpunktpaare im Innern eines nullpunktsymmetrischen konvexen Körpers  $K$ , so gilt:*

$$V(K) \leq 2^n \cdot (m + 1) \cdot d(\Lambda^n).$$

Satz 4.1 gibt also eine obere Schranke für den maximalen Flächeninhalt von  $\mathcal{M}_m^2$ -Quadern in einem Gitter  $\Lambda^2$  vor.

In Kapitel 4.1 wird gezeigt, daß diese obere Schranke tatsächlich angenommen wird. In diesem Fall wird analog zu Definition 1.10 von **absolut maximalen**  $\mathcal{M}_m^2$ -Quadern gesprochen:

**Definition 4.3**

*Ein  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader  $Q_m^2$ , der in einem Gitter  $\Lambda^2$  den maximalen Flächeninhalt*

$$V_{\max}(Q_m^2) = 4 \cdot (m + 1) \cdot d(\Lambda^2)$$

*annimmt, wird **absolut maximaler**  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader genannt.*

Des weiteren wird in Kapitel 4.1 gezeigt, wie die inneren Gitterpunkte in diesem maximalen Fall angeordnet sind.

In Kapitel 4.2 werden die Anzahl und Lage der Gitterpunkte auf solchen absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quadern sowie ihre Seitenverhältnisse untersucht, und in Kapitel 4.3 wird schließlich noch ein alternativer Beweis für den maximalen Flächeninhalt von  $\mathcal{M}_1^2$ -Quadern vorgestellt.

## 4.1 Konstruktion

Analog zur Konstruktion absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader in Kapitel 2.1 werden absolut maximale  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  wie folgt konstruiert:

1. Man geht aus von einer nullpunktsymmetrischen Strecke  $t_0$  auf einer Ursprungsgerade  $g_0$ , deren Endpunkte

$$\pm T(\pm x_{t,1}, \pm x_{t,2})_{B_{\Lambda^2}} \quad \text{mit} \quad \text{ggT}(x_{t,1}, x_{t,2}) = m + 1$$

Gitterpunkte von  $\Lambda^2$  sind. Die Strecke  $t_0$  ist eine der Achsen des Quaders, auf der - äquidistant verteilt - die Gitterpunkte

$$\pm T_j(\pm \frac{j}{m+1} \cdot x_{t,1}, \pm \frac{j}{m+1} \cdot x_{t,2})_{B_{\Lambda^2}} \quad \text{bzw.} \quad \pm T_j(\pm x_{t_j,1}, \pm x_{t_j,2})_{B_{\Lambda^2}}$$

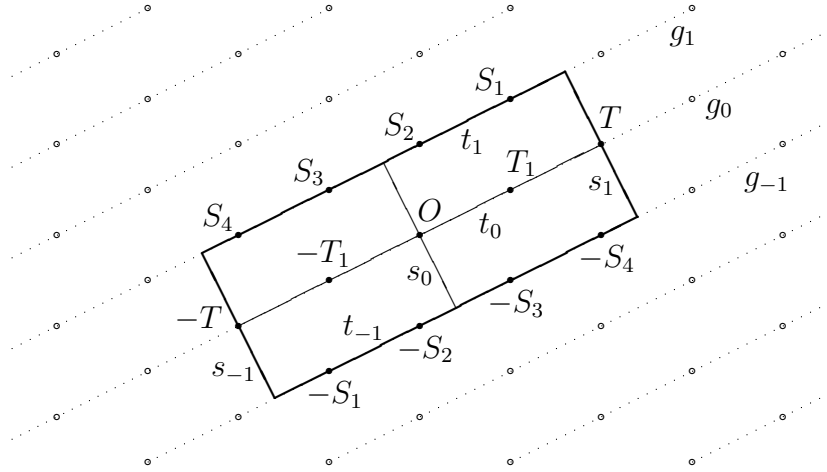
mit  $\text{ggT}(x_{t_j,1}, x_{t_j,2}) = j$ ;  $j = 1, \dots, m$  liegen (s. Fig. 4.4).

2. Alle weiteren Gitterpunkte von  $\Lambda^2$  liegen auf zu  $g_0$  parallelen, äquidistanten Gitterpunktgeraden  $g_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ .

Die senkrechte Projektion von  $t_0$  auf die zu  $g_0$  benachbarten Gitterpunktgeraden  $g_{\pm 1}$  ergibt die beiden Quaderseiten  $t_{\pm 1}$  mit den Randpunkten  $\pm S_i \in t_{\pm 1}$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ .

3. Durch Verbinden der Eckpunkte von  $t_{\pm 1}$  erhält man die zu  $t_0$  senkrechten Quaderseiten  $s_{\pm 1}$  mit  $\pm T \in s_{\pm 1}$ , durch Verbinden der Seitenmittelpunkte von  $t_{\pm 1}$  die zu  $s_{\pm 1}$  parallele Quaderachse  $s_0$ .

**Figur 4.4** Ein absolut maximaler  $\mathcal{M}_1^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$



Nach Konstruktion liegen die Gitterpunkte eines absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quaders nur auf der Quaderachse  $t_0$  und auf den Quaderseiten  $t_{\pm 1}$  und  $s_{\pm 1}$ . Der Ursprung  $O$  und die Gitterpunkte  $\pm T_j \in t_0$  sind also die einzigen inneren Gitterpunkte eines solchen Quaders.

Das ist die charakterisierende Eigenschaft absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$ :

**Satz 4.5**

*Ein maximal ausgedehnter  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader  $Q_m^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$  nimmt genau dann den maximalen Flächeninhalt*

$$V_{\max}(Q_m^2) = 4 \cdot (m + 1) \cdot d(\Lambda^2)$$

*an, wenn alle inneren Gitterpunkte von  $Q_m^2$  auf einer Achse des Quaders mit Endpunkten aus  $\Lambda^2$  liegen.*

**Beweis:** Sei  $Q_m^2$  ein maximal ausgedehnter  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader im Gitter  $\Lambda^2$ , d.h. auf jeder Quaderseite von  $Q_m^2$  liegt mindestens ein Gitterpunkt.

**1. Fall:**  $Q_m^2$  besitzt Seitenmittelpunkte aus  $\Lambda^2$ .

Seien  $\pm R(\pm x_{r,1}, \pm x_{r,2})_{B_{\Lambda^2}} \in \Lambda^2$  die Endpunkte der Quaderachse  $r_0$  und

$$\pm R_j(\pm \frac{j}{k+1} \cdot x_{r,1}, \pm \frac{j}{k+1} \cdot x_{r,2})_{B_{\Lambda^2}}; j = 0, \dots, k; 0 \leq k \leq m$$

die Gitterpunkte im Innern von  $r_0$  (s. Fig. 4.9). Die Gitterpunktgerade, auf der  $r_0$  liegt, sei  $g_0$ .

Sämtliche Gitterpunkte von  $\Lambda^2$  liegen dann auf  $g_0$  und auf zu  $g_0$  parallelen äquidistanten Gitterpunktgeradenpaaren  $g_{\pm i}, i \in \mathbb{N}^*$ , wobei für den Abstand von zwei benachbarten Gitterpunkten  $P_1$  und  $P_2$  auf einer solchen Gerade gilt:

$$(4.6) \quad |d(P_1, P_2)| = |d(\pm R_1, O)|.$$

Je zwei benachbarte Gitterpunkte auf zwei benachbarten Gitterpunktgeraden  $g_i$  und  $g_{i\pm 1}$  sind Eckpunkte einer Fundamentalzelle von  $\Lambda^2$  mit dem Flächeninhalt  $d(\Lambda^2)$ . Der Flächeninhalt von  $Q_m^2$  hängt also von der Anzahl der Gitterpunkte auf  $r_0$  und der Anzahl der Gitterpunktgeraden, die  $Q_m^2$  schneidet, ab.

Genauer gilt: Sei  $0 \leq k \leq m$  die Anzahl der nichttrivialen Gitterpunktpaare auf  $\overset{\circ}{r}_0$  und  $l$  die Anzahl der Gitterpunktgeradenpaare

$$g_{\pm i} \neq g_0$$

die  $\overset{\circ}{Q}_m^2$  schneiden. Dann ist der Flächeninhalt von  $Q_m^2$ :

$$(4.7) \quad V(Q_m^2) = 4 \cdot (k+1) \cdot (l+1) \cdot d(\Lambda^2).$$

Da auf  $r_0$  genau  $2k$  innere nichttriviale Gitterpunkte und der Ursprung  $O$  liegen, gibt es wegen (4.6) auf jedem Gitterpunktgeradenpaar  $g_{\pm i}$  genau

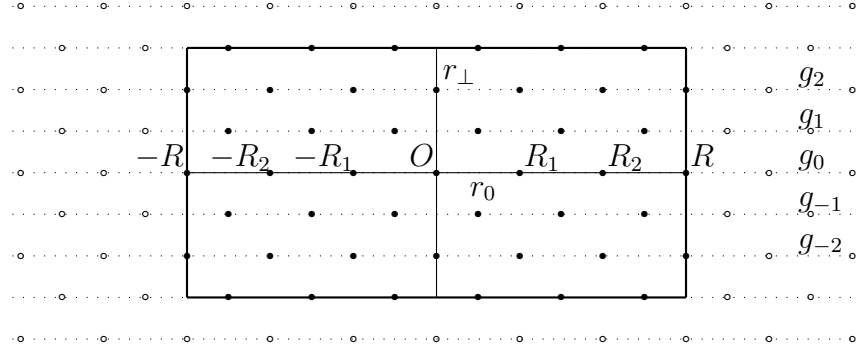
$$2k+1 \vee 2k+2$$

innere Gitterpunktpaare von  $Q_m^2$ , je nachdem ob eines der Gitterpunktpaare auf der zu  $r_0$  senkrechten Quaderachse  $r_{\perp}$  liegt oder nicht.

Insgesamt läßt sich die Anzahl  $m$  der inneren Gitterpunktpaare von  $Q_m^2$  also durch

$$(4.8) \quad k + (2k+1) \cdot l \leq m$$

nach unten abschätzen.

**Figur 4.9** Ein  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader mit  $m = 13$  und  $k = l = 2$ .

Nimmt ein solcher  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader den maximalen Flächeninhalt

$$V_{\max}(Q_m^2) = 4 \cdot (m + 1) \cdot d(\Lambda^2)$$

an, so gilt mit (4.7):

$$(4.10) \quad (k + 1) \cdot (l + 1) = kl + k + l + 1 = m + 1.$$

Aus (4.8) folgt in diesem Fall

$$2kl + k + l \stackrel{4.8}{\leq} m \stackrel{4.10}{=} kl + k + l,$$

also

$$kl \leq 0,$$

bzw. mit (4.10)

$$(k = 0 \wedge l = m) \vee (k = m \wedge l = 0).$$

1.) Für  $k = m$  liegen dabei *alle* inneren Gitterpunkte von  $Q_m^2$  auf der Quaderachse  $r_0$ .

2.) Für  $k = 0$  liegt *kein* nichttrivialer Gitterpunkt auf  $r_0$ . Man hat in diesem Fall nach (4.10) aber  $l = m$  Gitterpunktgeradenpaare  $g_{\pm i}$ , die das Innere von  $Q_m^2$  schneiden, wobei auf jeder dieser Geraden genau ein innerer Gitterpunkt von  $Q_m^2$  liegt, und zwar nach obiger Konstruktion auf der zu  $r_0$  senkrechten Quaderachse  $r_{\perp}$ . Da  $Q_m^2$  in diesem Fall nur Gitterpunkte auf  $r_{\perp}$  und den dazu parallelen Quaderseiten besitzt, müssen die Endpunkte von  $r_{\perp}$  auch Gitterpunkte sein.

Insgesamt wird für beide Fälle nach Gleichung (4.7) der maximale Flächeninhalt

$$V_{\max}(Q_m^2) = 4 \cdot (m + 1) \cdot d(\Lambda^2)$$

genau dann angenommen, wenn alle inneren Gitterpunkte des Quaders auf einer Quaderachse mit Endpunkten aus  $\Lambda^2$  liegen.

**2. Fall:**  $Q_m^2$  besitzt keine Seitenmittelpunkte aus  $\Lambda^2$ .

**2.1. Fall:** Im Innern aller vier Quaderseiten liegen jeweils  $\geq 2$  Gitterpunkte.

Sei wie im 1. Fall  $r_0 \subset g_0$  eine Achse von  $Q_m^2$ , auf der  $0 \leq k \leq m$  nichttriviale Gitterpunktpaare  $\pm R_j$  aus  $\Lambda^2$  liegen.

Da die zu  $r_0$  parallelen Quaderseiten mindestens 2 innere Gitterpunktpaare besitzen, liegen zum einen sämtliche Gitterpunkte von  $Q_m^2$  auf zu  $g_0$  parallelen äquidistanten Gitterpunktgeradenpaaren  $g_{\pm i}$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , von denen wie im 1. Fall  $l$  Paare das Innere von  $Q_m^2$  schneiden sollen, zum anderen liegt in jedem dieser Schnitte nach Hilfssatz 3.6 mindestens ein Gitterpunkt, d.h. es gilt:

$$(4.11) \quad 0 \leq l \leq m.$$

Da  $Q_m^2$  keine Seitenmittelpunkte aus  $\Lambda^2$  besitzt und daher die Endpunkte von  $r_0$  keine Gitterpunkte sind, ändern sich im Vergleich zum 1. Fall zwei Dinge:

1.) Bei der Berechnung des Flächeninhalts von  $Q_m^2$  analog Formel (4.7) ist das "=" durch ein "<" zu ersetzen, da  $r_0$  kürzer als die entsprechende Achse mit  $k$  inneren Gitterpunktpaaren aus dem 1. Fall ist. Es gilt also:

$$(4.12) \quad V(Q_m^2) < 4 \cdot (k+1) \cdot (l+1) \cdot d(\Lambda^2).$$

2.) Auf einem Gitterpunktgeradenpaar  $g_{\pm i}$  können im Unterschied zum 1. Fall auch lediglich  $2k$  innere Gitterpunktpaare von  $Q_m^2$  liegen. Die Anzahl  $m$  der inneren Gitterpunktpaare von  $Q_m^2$  läßt sich also durch

$$(4.13) \quad k + 2k \cdot l \leq m$$

nach unten abschätzen.

In dem Fall, daß der maximale Flächeninhalt

$$V_{\max}(Q_m^2) = 4 \cdot (m+1) \cdot d(\Lambda^2)$$

angenommen werden sollte, würde dann aber mit Gleichung (4.12) gelten:

$$(4.14) \quad (k+1) \cdot (l+1) = kl + k + l + 1 > m + 1.$$

Mit (4.13) erhält man daraus

$$2kl + k \stackrel{4.13}{\leq} m \stackrel{4.14}{<} kl + k + l$$

und damit

$$kl < l \quad \text{bzw.} \quad k = 0.$$

Daraus folgt aber in (4.14)  $l > m$ , was ein Widerspruch zu (4.11) ist. Der maximale Flächeninhalt  $V_{\max}(Q_m^2) = 4 \cdot (m+1) \cdot d(\Lambda^2)$  kann in diesem Fall also nicht angenommen werden.

**2.2. Fall:** Im Innern von zwei Quaderseiten liegt jeweils nur ein Gitterpunkt.

In diesem Fall läßt sich  $Q_m^2$  durch eine hinreichend kleine Drehung der sich - wegen der Gittersymmetrie - gegenüberliegenden Seiten um die beiden Gitterpunkte in ein nullpunktsymmetrisches Parallelogramm  $P_m^2$  größeren Flächeninhalts überführen, das auch genau  $m$  innere Gitterpunktpaare enthält (vgl. Bew. zu Satz 2.8, 2. Fall).

Da auch  $P_m^2$  konvex ist und somit den Voraussetzungen von Satz 4.1 genügt, gilt:

$$V_{\max} = 4 \cdot (m + 1) \cdot d(\Lambda^2) \geq V(P_m^2) > V(Q_m^2),$$

d.h. der Flächeninhalt von  $Q_m^2$  ist auch in diesem Fall kleiner als der Flächeninhalt des entsprechenden  $\mathcal{M}^2$ -Quaders aus dem 1. Fall.

Damit ist gezeigt, daß ein  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader  $Q_m^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$  den maximalen Flächeninhalt  $V_{\max} = 4 \cdot (m + 1) \cdot d(\Lambda^2)$  genau dann annimmt, wenn er wie im 1. Fall Seitenmittelpunkte aus  $\Lambda^2$  besitzt und alle inneren Gitterpunkte von  $Q_m^2$  auf einer Achse mit Endpunkten aus  $\Lambda^2$  liegen.  $\square\square\square$

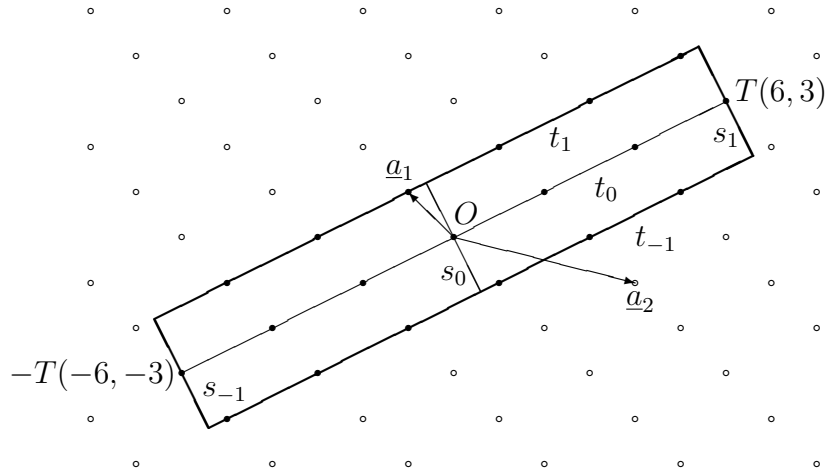
#### Bezeichnung 4.15

*Ein in einem Gitter  $\Lambda^2$  absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader mit dem Seitenmittelpunkt*

$$T(x_{t,1}, x_{t,2})_{B_{\Lambda^2}} \in \Lambda^2$$

*als Endpunkt der Gitterpunktachse  $t_0$  wird mit  $Q_{m,T}^2$  bzw.  $Q_{m,(x_{t,1}, x_{t,2})}^2$  bezeichnet.*

**Beispiel 4.16**  $Q_{2,(6,3)}^2$  im Gitter  $\Lambda^2$  mit der Basis  $B_{\Lambda^2} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$



Interpretiert man die Achse  $t_0$  eines absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quaders als absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^1$ -Quader in einem vollständigen 1-dimensionalen Untergitter  $\Lambda^1$  mit der Basis  $B_{\Lambda^1} = \{t_1\}$ , so läßt sich Satz 4.5 analog zu Korollar 2.10 auch folgendermaßen formulieren:

**Korollar 4.17**

*Ein maximal ausgedehnter  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  nimmt genau dann den maximalen Flächeninhalt*

$$V_{\max}(Q_m^2) = 4 \cdot (m + 1) \cdot d(\Lambda^2)$$

*an, wenn eine Achse des Quaders ein absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^1$ -Quader in einem vollständigen 1-dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^2$  ist.*

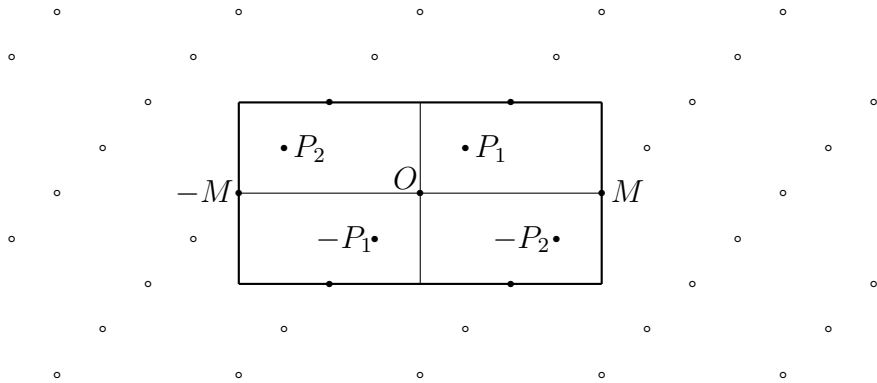
**Beweis:**  $\checkmark$

**Bemerkung 4.18**

*Nach Konstruktion besitzen absolut maximale  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader Seitenmittelpunkte aus  $\Lambda^2$ .*

*Im Gegensatz zu absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quadern ist die Existenz solcher Seitenmittelpunkte außer für den Fall  $m = 1$  (s. Kor. 4.35) aber noch keine hinreichende Bedingung für die Existenz absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader.*

**Beispiel 4.19** Ein  $\mathcal{M}_2^2$ -Quader  $\tilde{Q}_2^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$



Obwohl die Seitenmittelpunkte  $\pm M$  des Quaders Gitterpunkte sind, ist er nicht absolut maximal in  $\Lambda^2$ , da die Gitterpunkte  $\pm P_1, \pm P_2$  nicht auf einer der Quaderachsen liegen.

Tatsächlich gilt für den Flächeninhalt von  $\tilde{Q}_2^2$ :

$$V(\tilde{Q}_2^2) = 8 \cdot d(\Lambda^2) < 12 \cdot d(\Lambda^2) = V_{\max}(Q_2^2).$$

## 4.2 Eigenschaften

In diesem Kapitel werden die Anzahl und Lage von Gitterpunkten, die auf einem absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader liegen, sowie die Seitenverhältnisse solcher Quader untersucht.

### 4.2.1 Gitterpunkte

#### Anzahl der Gitterpunkte von $\mathcal{M}_m^2$ -Quadern

Im Gegensatz zu absolut maximalen  $\mathcal{M}^n$ -Quadern, bei denen die Anzahl der Gitterpunktpaare auf dem Rand der Quader gleich der Gesamtzahl der nichttrivialen Gitterpunktpaare auf dem Quader ist, unterscheiden sich diese Zahlen bei absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quadern genau um die Anzahl der inneren nichttrivialen Gitterpunktpaare  $\pm T_j, j = 1, \dots, m$  (vgl. Fig. 4.4).

In diesem Abschnitt wird daher immer nur die Gesamtzahl der nichttrivialen Gitterpunktpaare auf einem solchen absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader angegeben.

#### Satz 4.20

*Auf einem absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  liegen genau*

$$3m + 3 \quad \text{oder} \quad 3m + 4$$

*nichttriviale Gitterpunktpaare aus  $\Lambda^2$ .*

**Beweis:** Nach Konstruktion liegen die Gitterpunkte eines absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quaders  $Q_{m,T}^2$  auf der Quaderachse  $t_0$  und den beiden zu  $t_0$  parallelen Quaderseiten  $t_1$  und  $t_{-1}$ .

Auf  $t_0$  liegen die nichttrivialen Gitterpunkte  $\pm T$  und  $\pm T_j, j = 1, \dots, m$ , insgesamt also  $m + 1$  Gitterpunktpaare. Wegen

$$|t_1| = |t_{-1}| = |t_0|$$

und

$$(4.21) \quad |d(\pm S_i, \pm S_{i+1})| = |d(T_j, T_{j+1})|$$

für zwei benachbarte Gitterpunkte  $\pm S_i, \pm S_{i+1}$  auf  $t_{\pm 1}$  liegen auf diesen Quaderseiten mindestens  $2m + 2$  und höchstens  $2m + 3$  Gitterpunktpaare.

Insgesamt erhält man also

$$3m + 3 \quad \text{bzw.} \quad 3m + 4$$

nichttriviale Gitterpunktpaare auf  $Q_{m,T}^2$ .

□□□



**Beispiel 4.22**

Auf dem absolut maximalen  $\mathcal{M}_2^2$ -Quader  $Q_{2,(6,3)}^2$  aus Beispiel 4.16 liegen

$$3 \cdot 2 + 3 = 9$$

nichttriviale Gitterpunktpaare aus  $\Lambda^2$ .

**Korollar 4.23**

Liegen  $3m + 4$  Gitterpunktpaare eines Gitters  $\Lambda^2$  auf einem absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader  $Q_{m,T}^2$ , so gilt:

1. Die 4 Eckpunkte und die 4 Seitenmittelpunkte des Quaders sind Gitterpunkte von  $\Lambda^2$ .
2.  $\Lambda^2$  läßt sich durch eine Orthogonalbasis aufspannen.

**Beweis:**

1. Liegen  $2m + 3$  Gitterpunktpaare  $\pm S_i$  auf den Quaderseiten  $t_{\pm 1}$ , dann müssen sie wegen 4.21 genau so wie die Gitterpunkte auf  $t_0$  angeordnet sein, d.h. die Seitenmittelpunkte und die Endpunkte von  $t_{\pm 1}$  sind Gitterpunkte.

$Q_{m,T}^2$  besitzt also neben den Seitenmittelpunkten  $\pm T$  auf den Quaderseiten  $s_{\pm 1}$  weitere Seitenmittelpunkte auf  $t_{\pm 1}$ . Die 4 Endpunkte von  $t_{\pm 1}$  ergeben schließlich die Eckpunkte des Quaders.  $\square$

2. Seien  $\pm S \in \Lambda^2$  die Seitenmittelpunkte von  $Q_{m,T}^2$  auf den Quaderseiten  $t_{\pm 1}$ . Dann läßt sich  $\Lambda^2$  z.B. durch die orthogonalen Vektoren

$$\overrightarrow{OT_1} =: \underline{a}_1 \quad \text{und} \quad \overrightarrow{OS} =: \underline{a}_2$$

erzeugen.  $\square\square\square$

**Bemerkung 4.24**

Geometrisch läßt sich Satz 4.20 auch aus Satz 2.12 über die Anzahl von nichttrivialen Gitterpunktpaaren auf dem Rand absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -Quader herleiten:

Verlängert man einen absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quader über die Seitenmittelpunkte  $\pm T$ , so liegen wegen der gleichen Abstände benachbarter Gitterpunkte auf den Gitterpunktgeraden  $g_i$  für jedes innere Gitterpunktpaar auf  $t_0$  zusätzlich zwei Gitterpunktpaare auf den Quaderseiten  $t_{\pm 1}$ .

Da auf einem absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quader nach Satz 2.12 genau 3 oder 4 nichttriviale Gitterpunktpaare liegen, sind es bei einem absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader entsprechend  $3m + 3$  bzw.  $3m + 4$ .

### Lage der Gitterpunkte von $\mathcal{M}_m^2$ -Quadern

In Kapitel 2.2.1 wird u.a. gezeigt, wie die Koordinaten der Randpunkte  $\pm S_i(\pm x_{s_i,1}, \pm x_{s_i,2})_{B_{\Lambda^2}} \in g_{\pm 1}$  eines absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quaders in einem Gitter  $\Lambda^2$  von den Koordinaten der Gitterpunkte  $\pm T(\pm x_{t,1}, \pm x_{t,2})_{B_{\Lambda^2}} \in g_0$  abhängen. Dabei gilt nach Satz 2.15:

$$|x_{t,1}x_{s_i,2} - x_{t,2}x_{s_i,1}| = 1.$$

Aufgrund der sehr ähnlichen Konstruktion absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader läßt sich ausgehend von Satz 2.15 auch für diese Quader eine analoge Aussage formulieren:

#### Satz 4.25

Sei  $Q_{m,(x_{t,1},x_{t,2})}^2$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  mit der Basis  $B_{\Lambda^2} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ .

Dann gilt für die Gitterpunkte  $\pm S_i(\pm x_{s_i,1}, \pm x_{s_i,2})_{B_{\Lambda^2}} \in g_{\pm 1}$  auf  $Q_{m,(x_{t,1},x_{t,2})}^2$

$$|x_{t,1}x_{s_i,2} - x_{t,2}x_{s_i,1}| = m + 1$$

und für die Gitterpunkte  $\pm T_j(\pm x_{t_j,1}, \pm x_{t_j,2})_{B_{\Lambda^2}} \in g_0$  auf  $Q_{m,(x_{t,1},x_{t,2})}^2$

$$|x_{t,1}x_{t_j,2} - x_{t,2}x_{t_j,1}| = 0.$$

#### Beweis:

1. Nach dem Beweis von Satz 2.15 gilt bei absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quadern die Gleichung

$$|x_{t,1}x_{s_i,2} - x_{t,2}x_{s_i,1}| = 1$$

für sämtliche Punkte auf den Gitterpunktgeraden  $g_{\pm 1}$ , also auch für die entsprechenden Gitterpunkte eines wie in Kapitel 4.1 konstruierten absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quaders, wobei in diesem Fall die Punkte  $\pm T$  durch die Punkte  $\pm T_1$  mit  $\text{ggT}(x_{t_1,1}, x_{t_1,2}) = 1$  ersetzt werden müssen (vgl. Fig. 2.2 und Fig. 4.4).

Für einen derart konstruierten absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader folgt die Aussage dann mit  $(x_{t,1}, x_{t,2}) = (m+1) \cdot (x_{t_1,1}, x_{t_1,2})$ .  $\square$

2. Mit  $(x_{t,1}, x_{t,2}) = \frac{(m+1)}{j} \cdot (x_{t_j,1}, x_{t_j,2})$ ;  $j = 1, \dots, m$  erhält man

$$|x_{t,1}x_{t_j,2} - x_{t,2}x_{t_j,1}| = \frac{(m+1)}{j} \cdot |x_{t_j,1}x_{t_j,2} - x_{t_j,2}x_{t_j,1}| = 0. \quad \square\square\square$$

**Bemerkung 4.26**

Bei einem absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader  $Q_{m,T}^2$  und entsprechend bei einem absolut maximalen  $\mathcal{M}^2$ -Quader  $Q_T^2$  gilt allgemein die Gleichung

$$|x_{t,1}x_{s,2} - x_{t,2}x_{s,1}| = (m+1) \cdot |i|, \quad m \in \mathbb{N}$$

für einen beliebigen Gitterpunkt  $S(x_{s,1}, x_{s,2})_{B_{\Lambda^2}}$  auf einer der Gitterpunktgeraden  $g_i, i \in \mathbb{Z}$ .

**Beweis:** Die Vektoren  $\overrightarrow{OT} =: \underline{t}$  und  $\overrightarrow{OS} =: \underline{s}$  bilden eine Basis  $B_{\tilde{\Lambda}^2} = \{\underline{t}, \underline{s}\}$  eines 2-dimensionalen Untergitters  $\tilde{\Lambda}^2$  von  $\Lambda^2$  und spannen eine Fundamentalzelle  $F_B(\tilde{\Lambda}^2)$  mit dem Flächeninhalt

$$|F_B(\tilde{\Lambda}^2)| = |\det(\underline{t}, \underline{s})| = (m+1) \cdot |i| \cdot d(\Lambda^2)$$

auf. Die Determinante der Koeffizientenmatrix von  $(\underline{t}, \underline{s})$ , also

$$x_{t,1}x_{p,2} - x_{t,2}x_{p,1},$$

entspricht dabei der Determinante von  $(\underline{t}, \underline{s})$  bezüglich des Gitters  $\mathbb{Z}^2$  mit der Basis  $B_{\mathbb{Z}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  und der Gitterdeterminante  $d(\mathbb{Z}^2) = 1$ . Daraus folgt:

$$|x_{t,1}x_{s,2} - x_{t,2}x_{s,1}| = (m+1) \cdot |i| \cdot d(\mathbb{Z}^2) = (m+1) \cdot |i|. \quad \square\square\square$$

Analog zu Kapitel 2.2.1 lassen sich nun die Koordinaten der Gitterpunkte  $\pm S_i(\pm x_{s_i,1}, \pm x_{s_i,2}) \in t_{\pm 1}$ , die tatsächlich auf dem Quader  $Q_m^2$  liegen, über das Skalarprodukt der Vektoren  $\underline{s}_i$  und  $\underline{t}$  berechnen.

Für die senkrechte Projektion  $\underline{s}_{i,t}$  des Vektors  $\underline{s}_i$  auf den Vektor  $\underline{t}$  muß dabei gelten:

$$|\underline{s}_{i,t}| = \left| \frac{\underline{t} \cdot \underline{s}_i}{|\underline{t}|^2} \cdot \underline{t} \right| \leq |\underline{t}| \quad \text{bzw.} \quad |\underline{t} \cdot \underline{s}_i| \leq |\underline{t}|^2.$$

Man erhält also die folgende Bedingung für die Koordinaten von  $\pm S_i$ :

$$\begin{aligned} & |(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12})(x_{s_i,1}a_{11} + x_{s_i,2}a_{12}) + (x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22})(x_{s_i,1}a_{21} + x_{s_i,2}a_{22})| \\ & \leq (x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12})^2 + (x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22})^2. \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Gitterpunkte  $\pm T_j(\pm x_{t_j,1}, x_{t_j,2}) \in t_0$  ergeben sich nach Konstruktion zu

$$x_{t_j,1} = \frac{j}{m+1} \cdot x_{t_1} \quad \text{bzw.} \quad x_{t_j,2} = \frac{j}{m+1} \cdot x_{t_2}, \quad j = 1, \dots, m.$$

### 4.2.2 Seitenverhältnisse

#### Satz 4.27

Sei  $Q_{m,T}^2$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  mit der Gitterdeterminante  $d(\Lambda^2)$ .

Dann gilt: Das Seitenverhältnis  $|t_0| : |s_0|$  von  $Q_{m,T}^2$  ist von der Form

$$|d(T, O)|^2 : (m+1) \cdot d(\Lambda^2).$$

**Beweis:** Für die Seitenverhältnisse absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader  $Q_{m,T}^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$  gilt mit  $|t_0| \cdot |s_0| \stackrel{4.5}{=} 4 \cdot (m+1) \cdot d(\Lambda^2)$ :

$$|t_0| : |s_0| = |t_0|^2 : 4 \cdot (m+1) \cdot d(\Lambda^2).$$

Mit  $|t_0| = 2 \cdot |d(T, O)|$  folgt

$$|t_0| : |s_0| = |d(T, O)|^2 : (m+1) \cdot d(\Lambda^2). \quad \square\square\square$$

#### Beispiel 4.28

Der absolut maximale  $\mathcal{M}_2^2$ -Quader  $Q_{2,(6,3)}^2$  aus Beispiel 4.16 hat im Gitter  $\Lambda^2$  mit der Basis

$$B_{\Lambda^2} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1,4 \end{pmatrix} \right\}$$

und der Gitterdeterminante

$$d(\Lambda^2) = |(-1) \cdot (-1, 4) - 1 \cdot 1 \cdot 4| = 3$$

das Seitenverhältnis

$$\begin{aligned} |t_0| : |s_0| &= (6 \cdot (-1) + 3 \cdot 4)^2 + (6 \cdot 1, 1 + 3 \cdot (-1, 4))^2 : (2+1) \cdot 3 \\ &= 41, 76 : 9 \\ &= 4, 64 : 1. \end{aligned}$$

#### Korollar 4.29

Das Seitenverhältnis eines absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quaders  $Q_{m,T}^2$  läßt sich auch in der Form

$$|s_0| : |t_0| = \frac{d(\Lambda^2)}{d(\Lambda^1)} : (m+1) \cdot d(\Lambda^1)$$

mit  $d(\Lambda^1)$  als Determinante des von der Basis  $B_{\Lambda^1} = \{\underline{t}_1\}$  aufgespannten vollständigen 1-dimensionalen Untergitters  $\Lambda^1$  von  $\Lambda^2$  darstellen.

**Beweis:** Aus  $|d(T, O)| = (m+1) \cdot |d(T_1, O)| = (m+1) \cdot d(\Lambda^1)$  folgt:

$$|s_0| : |t_0| \stackrel{4.27}{=} d(\Lambda^2) : (m+1) \cdot |d(T_1, O)|^2 = \frac{d(\Lambda^2)}{d(\Lambda^1)} : (m+1) \cdot d(\Lambda^1). \quad \square$$

Für Gitter  $\Lambda^2$  mit einer Basis

$$B_{\Lambda^2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit } a_{ij} \in \mathbb{Z}; i, j = 1, 2$$

gilt analog zu Korollar 2.24:

**Korollar 4.30**

Sei  $\Lambda^2$  ein Gitter mit der Basis  $B_{\Lambda^2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right\}$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{Z}; i, j = 1, 2$  und  $Q_{m,T}^2$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader in  $\Lambda^2$  mit dem Seitenverhältnis

$$\begin{aligned} |t_0| : |s_0| &= |d(T, O)|^2 : (m+1) \cdot d(\Lambda^2) \\ &= (x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12})^2 + (x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22})^2 : (m+1) \cdot d(\Lambda^2). \end{aligned}$$

Dann gilt:

1. Das Seitenverhältnis von  $Q_{m,T}^2$  läßt sich in der Form  $k : l$  mit  $k, l \in \mathbb{N}^*$  darstellen.
2.  $\text{ggT}(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}, x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}) \mid (m+1) \cdot d(\Lambda^2)$ .

**Beweis:**

1. Analog Korollar 2.24. □
2. Analog Korollar 2.24 läßt sich für  $T_1(x_{t,1}, x_{t,2})_{B_{\Lambda^2}}$  zeigen:

$$\text{ggT}(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}, x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}) \mid d(\Lambda^2).$$

Wegen  $(x_{t,1}, x_{t,2}) = (m+1) \cdot (x_{t,1}, x_{t,2})$  folgt daraus

$$\text{ggT}(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}, x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}) \mid (m+1) \cdot d(\Lambda^2). \quad \square\square\square$$

**Bemerkung 4.31**

Man erhält für  $\text{ggT}(x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}, x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}) =: \kappa$  analog zu Bemerkung 2.25 Seitenverhältnisse der Form

$$\frac{\kappa^2}{(m+1) \cdot d(\Lambda^2)} \cdot \left[ \left( \frac{x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}}{\kappa} \right)^2 + \left( \frac{x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}}{\kappa} \right)^2 \right] : 1$$

mit  $\kappa \mid (m+1) \cdot d(\Lambda^2)$  und  $\left[ \left( \frac{x_{t,1}a_{11} + x_{t,2}a_{12}}{\kappa} \right)^2 + \left( \frac{x_{t,1}a_{21} + x_{t,2}a_{22}}{\kappa} \right)^2 \right]$  als Summe von zwei teilerfremden Quadraten natürlicher Zahlen mit der Primfaktorzerlegung

$$2^e \cdot p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_s^{e_s} \quad \text{mit } e = 0 \vee 1, p_i \equiv 1 \pmod{4}.$$

### 4.3 Absolut maximale $\mathcal{M}_1^2$ -Quader

Satz 4.5 über den maximalen Flächeninhalt von  $\mathcal{M}_m^2$ -Quadern in einem Gitter  $\Lambda^2$  läßt sich für den Fall  $m = 1$  auch noch anders beweisen. Dieser alternative Beweis wird in diesem Abschnitt vorgestellt.

Zusätzlich werden aus diesem Beweis weitere Eigenschaften absolut maximaler  $\mathcal{M}_1^2$ -Quader hergeleitet.

#### Satz 4.32

1. Für den Flächeninhalt eines  $\mathcal{M}_1^2$ -Quaders  $Q_1^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$  gilt:

$$V(Q_1^2) \leq 8 \cdot d(\Lambda^2).$$

2. Wird der maximale Flächeninhalt angenommen, so liegen die inneren Gitterpunkte von  $Q_1^2$  auf einer der Achsen des Quaders.

#### Beweis:

1. Seien  $\pm U$  die beiden inneren Gitterpunkte des  $\mathcal{M}_1^2$ -Quaders  $Q_1^2$  im Gitter  $\Lambda^2$  mit der Gitterdeterminante  $d(\Lambda^2)$  und

$$V \neq k \cdot U, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ein weiterer Gitterpunkt von  $\Lambda^2$  auf dem Rand von  $Q_1^2$ . Dann läßt sich  $\Lambda^2$  durch die Vektoren

$$\overrightarrow{OU} =: \underline{u} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{OV} =: \underline{v}$$

erzeugen, d.h.  $B_{\Lambda^2} = \{\underline{u}, \underline{v}\}$  ist eine Basis von  $\Lambda^2$ .

Nun betrachtet man  $Q_1^2$  im Gitter  $\tilde{\Lambda}^2$  mit der Basis  $B_{\tilde{\Lambda}^2} = \{2\underline{u}, \underline{v}\}$ . Dieses Gitter ist ein Untergitter von  $\Lambda^2$  mit der Gitterdeterminante

$$(4.33) \quad d(\tilde{\Lambda}^2) = 2 \cdot d(\Lambda^2),$$

wobei  $\pm U$  keine Gitterpunkte von  $\tilde{\Lambda}^2$  sind. In  $\tilde{\Lambda}^2$  ist  $Q_1^2$  somit ein nullpunktsymmetrischer Quader, in dessen Innern keine nichttrivialen Gitterpunkte liegen.

Damit gilt nach dem Satz von Minkowski für den Flächeninhalt von  $Q_1^2$ :

$$(4.34) \quad V(Q_1^2) \leq 4 \cdot d(\tilde{\Lambda}^2) \stackrel{(4.33)}{=} 8 \cdot d(\Lambda^2). \quad \square$$

2. In (4.34) liegt Gleichheit nach Satz 2.8 genau dann vor, wenn (mindestens) zwei Seitenmittelpunkte  $\pm M$  von  $Q_1^2$  Gitterpunkte von  $\Lambda^2$  und somit auch Gitterpunkte von  $\Lambda^2$  sind.

Dann müssen die beiden inneren Gitterpunkte  $\pm U$  von  $Q_1^2$  aber entweder auf der Quaderachse  $\overline{M}, -\overline{M} =: m_0$  oder auf der zu  $m_0$  senkrechten Achse  $m_\perp$  liegen, da ansonsten auch zwei der Punkte

$$U \pm \overrightarrow{OM} \quad \text{bzw.} \quad -U \pm \overrightarrow{OM}$$

innere Gitterpunkte von  $Q_1^2$  wären.  $\square\square\square$

Nach dem obigen Beweis reicht also im Gegensatz zu maximal ausgedehnten  $\mathcal{M}_m^2$ -Quadern mit  $m \geq 2$  bei maximal ausgedehnten  $\mathcal{M}_1^2$ -Quadern die Existenz von Seitenmittelpunkten  $\pm M$  aus  $\Lambda^2$  bereits zur Charakterisierung absolut maximaler  $\mathcal{M}_1^2$ -Quader aus (vgl. Bem. 4.18). Es gilt:

**Korollar 4.35**

*Genau die in einem Gitter  $\Lambda^2$  maximal ausgedehnten  $\mathcal{M}_1^2$ -Quader, die Seitenmittelpunkte aus  $\Lambda^2$  besitzen, sind absolut maximal in  $\Lambda^2$ .*

**Beweis:**  $\checkmark$

Aus dem Beweis von Satz 4.32 folgt auch direkt die Lage der inneren Gitterpunkte  $\pm U$  eines absolut maximalen  $\mathcal{M}_1^2$ -Quaders  $Q_1^2$ :

Aus  $\pm U \in m_0$  folgt

$$\pm U = \pm \frac{1}{2} M$$

und für  $\pm U \in m_\perp$  müssen die Endpunkte  $\pm M_\perp$  von  $m_\perp$  auch Gitterpunkte von  $\Lambda^2$  sein, da  $Q_1^2$  nach Voraussetzung maximal ausgedehnt ist, und Gitterpunkte in diesem Fall nur auf  $m_\perp$  und den zu  $m_\perp$  parallelen Quaderseiten liegen. Daraus folgt aber

$$\pm U = \pm \frac{1}{2} M_\perp.$$

Es gilt also entsprechend der Konstruktion absolut maximaler  $\mathcal{M}_1^2$ -Quader nach Kapitel 4.1:

**Korollar 4.36**

*Die inneren Gitterpunkte eines in einem Gitter  $\Lambda^2$  absolut maximalen  $\mathcal{M}_1^2$ -Quaders liegen auf einer Achse des Quaders und sind die Mittelpunkte der entsprechenden Halbachsen.*

**Beweis:**  $\checkmark$

## 4.4 Ausblick: Absolut maximale $\mathcal{M}_m^n$ -Quader

Genau wie in Kapitel 3.3 lassen sich bei absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^n$ -Quadern Vermutungen über die Konstruktion und die Anzahl von Gitterpunkten auf solchen Quadern sowie über ihre Seitenverhältnisse anstellen.

### Konstruktion absolut maximaler $\mathcal{M}_m^n$ -Quader

In Korollar 4.17 werden absolut maximale  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  dadurch charakterisiert, daß eine der Achsen eines solchen Quaders ein absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^1$ -Quader in einem vollständigen 1-dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^2$  ist.

Da das gerade der charakterisierenden Eigenschaft absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ - und  $\mathcal{M}^3$ -Quader entspricht (vgl. Kap. 3.3), ist analog zu Vermutung 3.23 anzunehmen, daß dieses Prinzip auch für höherdimensionale  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader Gültigkeit besitzt:

### Vermutung 4.37

*Ein  $\mathcal{M}_m^n$ -Quader  $Q_m^n$  in einem Gitter  $\Lambda^n$  besitzt genau dann das - nach dem verallgemeinerten Satz von Minkowski maximale - Volumen*

$$V_{\max}(Q_m^n) = 2^n \cdot (m+1) \cdot d(\Lambda^n),$$

*wenn eine der Achsen des Quaders ein absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^{n-1}$ -Quader in einem vollständigen  $(n-1)$ -dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^n$  ist.*

Genau wie bei absolut maximalen  $\mathcal{M}^n$ -Quadern läßt sich auch in diesem Fall leicht zeigen, daß ein absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^{n-1}$ -Quader in einem vollständigen  $(n-1)$ -dimensionalen Untergitter  $\Lambda^{n-1}$  von  $\Lambda^n$  auf einer Gitterpunkthyperebene  $H_0$  durch senkrechte Projektion auf die beiden zu  $H_0$  benachbarten Gitterpunkthyperebenen  $H_{\pm 1}$  zu einem absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^n$ -Quader in  $\Lambda^n$  erweitert werden kann.

Wesentlich schwieriger ist allerdings auch hier die andere Richtung des Beweises, nämlich zu zeigen, daß jeder absolut maximale  $\mathcal{M}_m^n$ -Quader einen solchen absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^{n-1}$ -Quader als Achse besitzt.

### Anzahl der Gitterpunkte absolut maximaler $\mathcal{M}_m^2$ -Quader

Nach Satz 4.20 liegen auf einem absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  genau  $3m+3$  oder  $3m+4$  nichttriviale Gitterpunktpaare aus  $\Lambda^2$ . Bei einem absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^1$ -Quader sind es genau  $m+1$  Gitterpunktpaare (vgl. d. Herleitung zu Kor. 4.17).

Diese Ergebnisse decken sich für den Fall  $m=0$  mit der Anzahl nichttrivialer Gitterpunktpaare auf absolut maximalen  $\mathcal{M}^1$ - und  $\mathcal{M}^2$ -Quadern.



Legt man für einen absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^n$ -Quader  $Q_m^n$  also das gleiche Prinzip der "Bestückung" mit nichttrivialen Gitterpunkten zugrunde, wie bei absolut maximalen  $\mathcal{M}^n$ -Quadern in Kapitel 3.3, so erhält man folgende Anzahl von Gitterpunkten:

Die *maximale* Anzahl von nichttrivialen Gitterpunkten auf einem  $\mathcal{M}_m^1$ -Quader läßt sich durch  $2m + 3 - 1 = 2m + 2$  darstellen, wobei  $2m + 3$  die Gesamtzahl der Gitterpunkte auf dem Quader ist und der Ursprung abgezogen wird.

Im 2-Dimensionalen kommt durch die senkrechte Projektion des 1-dimensionalen Quaders maximal noch zwei mal die gleiche Anzahl von Gitterpunkten hinzu, wobei der Ursprung insgesamt nur ein mal abgezogen wird. Es ergeben sich also maximal  $3 \cdot (2m + 3) - 1 = 6m + 8$  nichttriviale Gitterpunkte.

Im 3-Dimensionalen würden sich durch weitere Projektion schließlich maximal  $3^2 \cdot (2m + 3) - 1 = 18m + 26$  nichttriviale Gitterpunkte ergeben.

Insgesamt könnten auf dem Rand eines  $n$ -dimensionalen  $\mathcal{M}_m^n$ -Quaders also  $3^{n-1} \cdot (2m + 3) - 1$  nichttriviale Gitterpunkte liegen.

Die *minimale* Anzahl nichttrivialer Gitterpunkte auf einem absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^1$ -Quader läßt sich durch  $2^1 \cdot (m + 1) = 2m + 2$  darstellen.

Zur minimalen "Bestückung" eines absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quaders mit nichttrivialen Gitterpunkten benötigt man dann zusätzlich  $2 \cdot 2 \cdot (m + 1)$  Gitterpunkte, insgesamt also  $(2^1 + 2^2) \cdot (m + 1) = 6m + 6$  nichttriviale Gitterpunkte.

Im 3-Dimensionalen würden wiederum  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (m + 1)$  Gitterpunkte hinzukommen, insgesamt wären es also mindestens  $(2^1 + 2^2 + 2^3) \cdot (m + 1) = 14m + 14$  nichttriviale Gitterpunkte.

Allgemein würden sich damit auf dem Rand eines absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^n$ -Quaders mindestens  $\sum_{i=1}^n 2^i \cdot (m + 1) = 2 \cdot (2^n - 1) \cdot (m + 1)$  nichttriviale Gitterpunkte ergeben.

Insgesamt erhält man also:

#### Vermutung 4.38

*Sei  $Q_m^n$  ein absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^n$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^n$ . Dann gilt für die Anzahl der nichttrivialen Gitterpunkte auf  $Q_m^n$ :*

$$2 \cdot (2^n - 1) \cdot (m + 1) \leq \#GP(Q_m^n) \leq 3^{n-1} \cdot (2m + 3) - 1.$$

Dabei decken sich beide Abschätzungen für den Fall  $m = 0$  mit den Ergebnissen für absolut maximale  $\mathcal{M}^n$ -Quader aus Vermutung 3.24.

**Seitenverhältnisse absolut maximaler  $\mathcal{M}_m^n$ -Quader**

Das Seitenverhältnis  $|s_0| : |t_0|$  eines absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^2$ -Quaders  $Q_{m,T}^2$  in einem Gitter  $\Lambda^2$  mit der Gitterdeterminante  $d(\Lambda^2)$  ist nach Satz 4.27 von der Form

$$|s_0| : |t_0| = (m+1) \cdot d(\Lambda^2) : |d(T, O)|^2,$$

bzw. nach Korollar 4.29 von der Form

$$|s_0| : |t_0| = d(\Lambda^2) : (m+1) \cdot |d(T_1, O)|^2$$

für die Gitterpunkte  $T_1(\frac{1}{m+1} \cdot x_{t,1}, \frac{1}{m+1} \cdot x_{t,2})$  oder

$$|s_0| : |t_0| = \frac{d(\Lambda^2)}{d(\Lambda^1)} : (m+1) \cdot d(\Lambda^1)$$

mit  $d(\Lambda^1) = |d(T_1, O)|$  als Gitterdeterminante des von der Basis  $B_{\Lambda^1} = \{t_1\}$  aufgespannten vollständigen 1-dimensionalen Untergitters  $\Lambda^1$  von  $\Lambda^2$ .

Betrachtet man analog zu den "Seitenverhältnissen" absolut maximaler  $\mathcal{M}^n$ -Quader die Verhältnisse der Abstände sich gegenüberliegender Quaderseiten, die durch den Quotienten der Determinanten eines  $k$ -dimensionalen Gitters  $\Lambda^k$  und seines  $(k-1)$ -dimensionalen Untergitters  $\Lambda^{k-1}$  beschrieben werden, so würden sich unter der Voraussetzung, daß Vermutung 4.37 über die Konstruktion absolut maximaler  $n$ -dimensionaler  $\mathcal{M}_m^n$ -Quader zutrifft, analog zu Satz 3.25 folgende "Seitenverhältnisse" für absolut maximale  $\mathcal{M}_m^n$ -Quader ergeben:

**Satz 4.39**

*Das Verhältnis der Abstände sich gegenüberliegender Quaderseiten absolut maximaler  $n$ -dimensionaler  $\mathcal{M}_m^n$ -Quader  $Q_m^n$  in einem Gitter  $\Lambda^n$  ist von der Form*

$$\frac{d(\Lambda^n)}{d(\Lambda^{n-1})} : \frac{d(\Lambda^{n-1})}{d(\Lambda^{n-2})} : \cdots : \frac{d(\Lambda^2)}{d(\Lambda^1)} : (m+1) \cdot d(\Lambda^1),$$

*wobei die  $\Lambda^k, 1 \leq k \leq n-1$  die entsprechenden  $k$ -dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^n$  sind, in denen die absolut maximalen  $\mathcal{M}_m^k$ -Quader liegen, aus denen sich der  $\mathcal{M}_m^n$ -Quader  $Q_m^n$  nach Vermutung 4.37 aufbaut.*

**Beweis:**  $\checkmark$

# Zusammenfassung

Grundlage dieser Arbeit ist der in der Einleitung zitierte Gitterpunktsatz von Minkowski für nullpunktsymmetrische konvexe Körper im  $\mathbb{R}^n$  (vgl. [2], S. 33, Th. 1). Der Satz gibt eine Volumenabschätzung für derartige Körper in einem  $n$ -dimensionalen Gitter  $\Lambda^n$ , die keine nichttrivialen Gitterpunkte aus  $\Lambda^n$  in ihrem Innern enthalten.

Eine Erweiterung dieses Satzes ist der verallgemeinerte Satz von Minkowski (vgl. [2], S. 44, Th. 1), bei dem eine gewisse - wegen der Nullpunktsymmetrie der betrachteten Körper gerade - Anzahl von inneren Gitterpunkten zugelassen wird. Aus diesem Satz folgt, daß ein solcher *Minkowski-Körper*  $K$  mit  $m \in \mathbb{N}$  inneren Gitterpunktpaaren höchstens das Volumen

$$V_{\max}(K) = 2^n \cdot (m + 1) \cdot d(\Lambda^n), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

besitzt.

In der vorliegenden Arbeit wurden 2- und 3-dimensionale Quader, die den Voraussetzungen des (verallgemeinerten) Satzes von Minkowski genügen, untersucht.

Dabei wurden zunächst 2- und 3-dimensionale Minkowski-Quader - in der Arbeit  $\mathcal{M}^2$ - bzw.  $\mathcal{M}^3$ -Quader genannt - betrachtet, die *keine* nichttrivialen Gitterpunkte des zugrundegelegten Gitters  $\Lambda^2$  bzw.  $\Lambda^3$  in ihrem Innern enthalten (Kap. 2 und 3).

Es konnte gezeigt werden, daß diese Quader das maximale Volumen

$$V_{\max}(K) = 2^n \cdot d(\Lambda^n); \quad n = 2 \vee n = 3$$

tatsächlich annehmen können, und zwar genau dann, wenn eine Achse des Quaders ein absolut maximaler Minkowski-Quader in einem vollständigen  $(n-1)$ -dimensionalen Untergitter von  $\Lambda^n$  ist (s. Kor. 2.10, Satz 3.2).

Weitere Eigenschaften dieser *absolut maximalen* Quader wie die Anzahl und Lage von Gitterpunkten auf dem Quaderrand sowie ihre Seitenverhältnisse<sup>2</sup> wurden untersucht.

---

<sup>2</sup>Tatsächlich wurden die Verhältnisse der Abstände sich gegenüberliegender Quaderseiten betrachtet, was nur im 2-Dimensionalen dem Längenverhältnis der Quaderseiten entspricht.

So konnte gezeigt werden, für welche Gitterpunktanzahlen absolut maximale  $\mathcal{M}^2$ - und  $\mathcal{M}^3$ -Quader in einem Gitter  $\Lambda^2$  bzw.  $\Lambda^3$  existieren (s. Satz 2.12 und Satz 3.9) und für welche dieser Gitterpunktanzahlen ein  $\mathcal{M}^2$ - bzw.  $\mathcal{M}^3$ -Quader notwendig absolut maximal ist (s. Satz 2.14 und Satz 3.11).

Aus der Konstruktion absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ - und  $\mathcal{M}^3$ -Quader konnte ein Verfahren entwickelt werden, mit dem man aus den Koordinaten der Gitterpunkte auf der absolut maximalen  $(n-1)$ -dimensionalen Achse eines absolut maximalen  $n$ -dimensionalen Quaders die Koordinaten der restlichen Gitterpunkte auf dem Quader ermitteln kann (vgl. Kap. 2.2.1 und Kap. 3.2.1: Lage der Randpunkte absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ - bzw.  $\mathcal{M}^3$ -Quader).

Schließlich wurden noch die "Seitenverhältnisse" absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ - und  $\mathcal{M}^3$ -Quader betrachtet. Dabei konnte gezeigt werden, daß sie nur von den Gitterdeterminanten des zugrundegelegten Gitters  $\Lambda^n$  und seiner vollständigen  $(n-k)$ -dimensionalen Untergitter abhängen (s. Kor. 2.20 und 3.22).

Für bestimmte Gitter wurden die Seitenverhältnisse von  $\mathcal{M}^2$ -Quadern zusätzlich auf Ganzzahligkeit und weitere zahlentheoretische Eigenschaften untersucht (s. Kor. 2.24, Bem. 2.25) und es wurden die maximalen Flächeninhalte von  $\mathcal{M}^2$ -Quadern mit einem festen Seitenverhältnis  $\nu : 1$ ,  $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$  ermittelt (Kap. 2.3, Satz 2.38).

Als eine Erweiterung der in Kapitel 2 betrachteten  $\mathcal{M}^2$ -Quader wurden in Kapitel 4 nullpunktsymmetrische 2-dimensionale Quader untersucht, in deren Innern eine gewisse Anzahl  $m \in \mathbb{N}^*$  nichttrivialer Gitterpunktpaare zugelassen wird, sogenannte  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader.

Dabei konnten die für  $\mathcal{M}^2$ -Quader gewonnenen Ergebnisse bezüglich Konstruktion und Eigenschaften größtenteils verallgemeinert werden (s. Kor. 4.17, Satz 4.20, Satz 4.25 und Kor. 4.29).

Betrachtet man die Ergebnisse aus den Kapiteln 2, 3 und 4 so läßt sich vermuten, daß sich sowohl die Konstruktion absolut maximaler  $\mathcal{M}^2$ -,  $\mathcal{M}^3$ - und  $\mathcal{M}_m^2$ -Quader als auch die untersuchten Eigenschaften größtenteils auf höhere Dimensionen übertragen lassen (vgl. Kap. 3.3 und Kap. 4.4).

Es sind also genügend Ansätze für weitere Untersuchungen zu diesem Thema gegeben.

# Literaturverzeichnis

- [1] **H. Minkowski**, Geometrie der Zahlen, Chelsea Publishing Company, New York, 1953
- [2] **C. G. Lekkerkerker**, Geometry of numbers, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
- [3] **J. W. S. Cassels**, An introduction to the geometry of numbers, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959
- [4] **P. M. Gruber, C. G. Lekkerkerker**, Geometry of numbers, 2. edition, North-Holland Mathematical Library, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1987
- [5] **O.-H. Keller**, Geometrie der Zahlen, Enz. Math. Wiss., Band I2, Heft 11, Teil III, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1954
- [6] **K. Burde**, Geometrie der Zahlen, Vorlesungsmitschrift, SS 1997
- [7] **G. Pick**, Geometrisches zur Zahlenlehre, Sitzungsber. Lotos Prag, (2) 19, 1900 (zitiert aus: [8], S. 96, Nr. 107)
- [8] **H. Steinhaus**, Mathematical Snapshots, 3rd American Edition, Oxford University Press, New York, 1969
- [9] **T. Bonnesen, W. Fenchel**, Theorie der konvexen Körper, Chelsea Publishing Company, New York, 1948
- [10] **A. Scholz, B. Schoeneberg**, Einführung in die Zahlentheorie, 5. Aufl., Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1973
- [11] **I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew**, Taschenbuch der Mathematik, 25., durchgesehene Aufl., B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig und Verlag Nauka, Moskau, 1991

